Modeliranje komponente trenda u vremenskoj seriji

Zorica Mladenović

1

Modeliranje komponente trenda u vremenskoj seriji

- Dva tipa modela: trend-stacionarna i diferencno-stacionarna klasa modela
- Detaljnije o diferencno-stacionarnoj klasi modela
- Zašto je važno napraviti razliku između dve klase modela?
- ARIMA modeli

2

Trend-stacionarna klasa modela

$$X_t = \beta_0 + \beta_1 t + e_t,\ \mathrm{t}=1,2,\ldots$$

$$\mathrm{E}(e_t)=0,\ \mathrm{var}(e_t)=\sigma^2,\ \mathrm{cov}(e_t,e_{t-k})=0 \Rightarrow \mathrm{E}(e_t e_{t-k})=0,\ \mathrm{k}\neq 0.$$

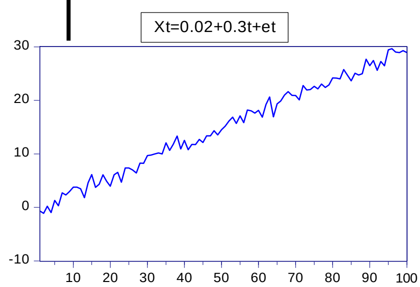
$$\mathrm{E}(X_t)=\beta_0+\beta_1 t$$

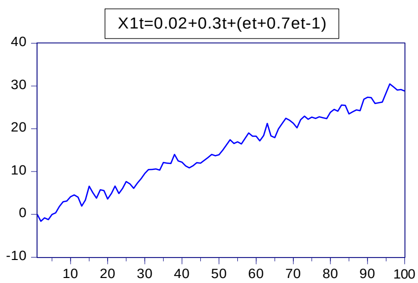
$$\mathrm{var}(X_t)=\mathrm{var}(e_t)=\sigma^2,\ \ \mathrm{t}=1,2,\ldots$$

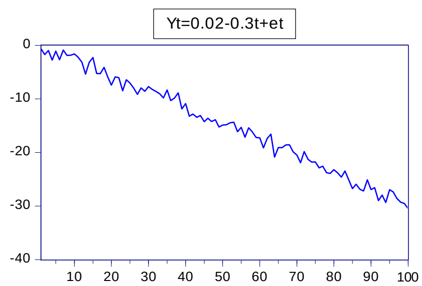
$$\begin{aligned}\mathrm{cov}(X_t,X_{t-k}) &= E\big(\mathrm{X_t}-E(X_t)\big)\big(\mathrm{X_{t\text{-}k}}-E(X_{t-k})\big)\\ &= E\big(\underbrace{\mathrm{X_t}-\beta_0-\beta_1 t}_{e_t}\big)\big(\underbrace{\mathrm{X_{t\text{-}k}}-\beta_0-\beta_1(t-k)}_{e_{t-k}}\big)\\ &= 0,\ \mathrm{t}=1,2,\ldots,\ \mathrm{k}=1,2,\ldots\end{aligned}$$

3

Trend-stacionarna klasa modela II: grafički prikaz generisanih podataka

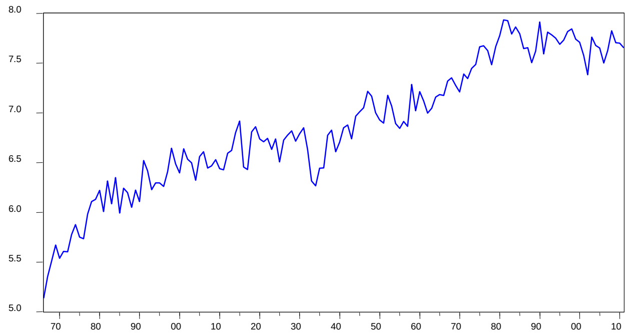






Trend-stacionarna klasa modela III: primer iz praktične analize

- Period: 1866 – 2011. godina (146 godišnjih opservacija, log vrednosti)



Godišnja proizvodnja pšenice u SAD

5

Diferencno-stacionarna klasa modela

$$X_t = \beta + X_{t-1} + e_t, \mathbf{E}(e_t) = 0, \mathbf{var}(e_t) = \sigma^2, \mathbf{E}(e_t e_{t-k}) = 0, \mathbf{k} \neq 0.$$

$$\beta > 0, \textbf{konstantni prirast}$$

$$\Delta X_t = \beta + e_t, \mathbf{E}(\Delta X_t) = \beta, \mathbf{var}(\Delta X_t) = \mathbf{var}(e_t) = \sigma^2.$$

6

Diferencno-stacionarna klasa modela II

- Vremenska serija nema stabilnu varijansu.
  - Varijansa je linearna funkcija vremena
  - Sa protokom vremena varijansa se neograničeno povećava.
- Kovarijansa svaka dva člana zavisi od trenutka vremena i povećava se tokom vremena.
- Model možemo shvatiti kao AR(1) model sa autoregresionim parametrom 1:
  - Obična autokorelaciona funkcija uzima niz nenultih vrednosti koje **sporo** opadaju počev od vrednosti bliske 1.
  - Parcijalna autokorelaciona funkcija poseduje nenultu vrednost samo na prvoj docnji i ta vrednost je bliska 1.

7

Diferencno-stacionarna klasa modela III

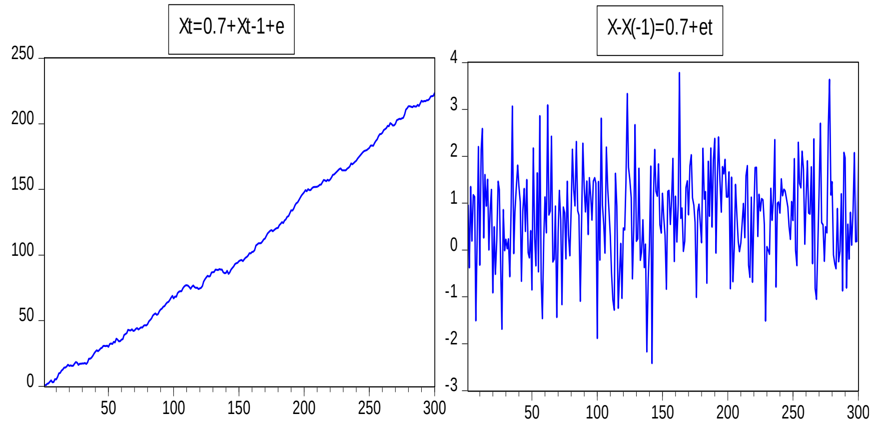
- V. serija se transformiše u stacionarnu primenom operatora prve diference.
- Prva diferenca primenjena jednom: $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$
- Prva diferenca primenjena dva puta, druga diferenca:

$$\Delta^2 X_t = \Delta\Delta X_t = \Delta X_t - \Delta X_{t-1} = X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}$$

$$X_t = \beta + X_{t-1} + e_t \Rightarrow \underbrace{X_t - X_{t-1}}_{\Delta X_t} = \beta + e_t, \Delta X_t = \beta + e_t$$

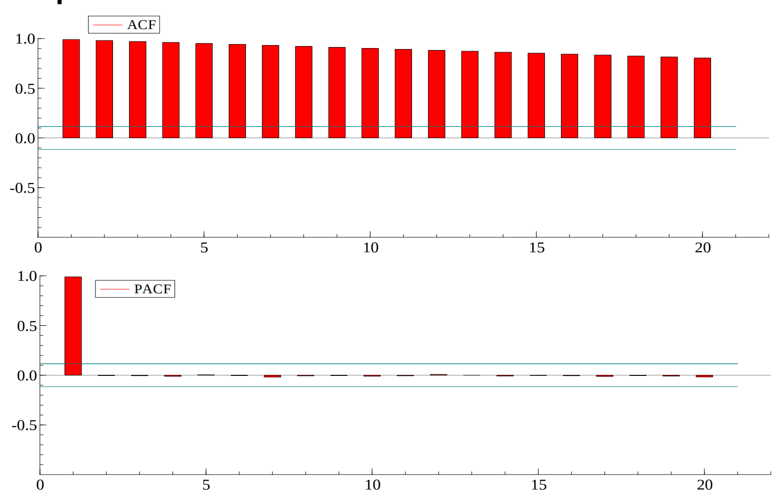
8

Diferencno-stacionarna klasa modela IV: grafički prikaz generisanih podataka



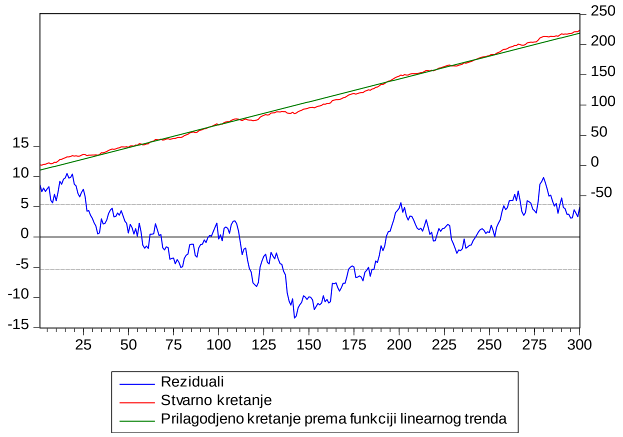
9

Diferencno-stacionarna klasa modela V: obična i parcijalna autokorelaciona funkcija



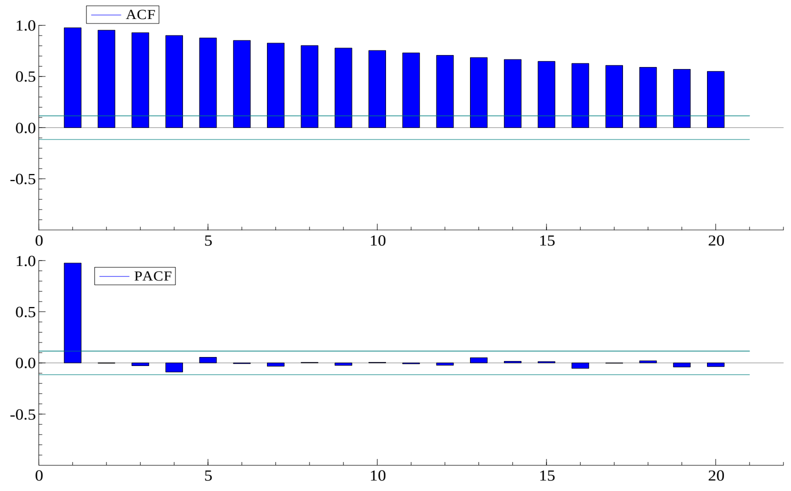
10 10

Da li se izdvajanjem funkcije trenda menja statistička priroda vremenske serije diferencno-stacionarne klase modela?



11

Korelogrami serije reziduala sugerišu njihovu nestacionarnost: izdvajanje komp. trenda nije suštinska transformacija



12

Alternativni termini za diferencno-stacionarnu klasa modela:

- Vremenska serija sa stohastičkim trendom
- Integrisano-stacionarna vremenska serija
- Vremenska serija sa jediničnim korenom
- Slučajan hod

13

Alternativni termini II:

- Vremenska serija sa stohastičkim trendom
  - Na osnovu informacije o prethodnom kretanju vremenske serije ne možemo predvideti njeno kretanje u budućnosti. U suprotnom, kada bi trend bio deterministički, tada bi i prognoza bila pouzdana.

14

Alternativni termini III:

- Integrisano-stacionarna vremenska serija
  - Vremenska serija dobija se na osnovu zbira članova procesa beli šum.
  - Operaciji sabiranja u diskretnom prostoru odgovara postupak integraljenja neprekidnih veličina.
  - Reč je o integrisanom procesu prvog reda, gde red 1 pokazuje koliko puta treba diferencirati seriju da bi se dobila njena stacionarna reprezentacija.
  - Ako je prva diferenca stacionarna, tada je vremenska serija integrisana reda 1. Oznaka: $X_t \sim I(1)$.
  - Za stacionarnu vremensku seriju kažemo da je integrisana reda 0: $X_t \sim I(0)$.

15

Alternativni termini IV:

- Vremenska serija sa jediničnim korenom
  - Reč je o AR(1) modelu kod koga je autoregresioni parametar jednak vrednosti 1. Ponašanje ove v. serije na dugi rok određuje rešenje sledeće karakteristične jednačine:

$$X_t - 1 \cdot X_{t-1} = e_t$$

$$g - 1 = 0 \Rightarrow g = 1.$$

  - Koren korespondirajuće karakteristične jednačine uzima vrednost jedan. Otuda potiče naziv jedinični koren.
  - Broj jediničnih korena odgovara nivou integrisanosti vremenske serije, odnosno broju postupaka diferenciranja potrebnih za stacionarnu reprezentaciju vremenske serije.

16

Rezime uvedenih termina:

Ako vremenska serija ima ***d*** jediničnih korena, onda je ona integrisana reda ***d***, i treba je diferencirati ***d*** puta da bi se obezbedila njena stacionarna reprezentacija.

$$\boxed{\begin{array}{c} Serija\ ima\ d\ \ jedinicnih\ \ korena \\ \Leftrightarrow X_t \sim I(d) \Leftrightarrow \Delta^d X_t \sim I(0) \end{array}}$$

17

Kako izgleda vremenska serija sa dva jedinična korena?

$$X_t = 2X_{t-1} - X_{t-2} + e_t$$

$$X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2} = e_t$$

$$g^2 - 2g + 1 = 0 \Leftrightarrow (g-1)^2 = 0 \Rightarrow g_1 = g_2 = 1 \Rightarrow X_t \sim I(2)$$

$$\underbrace{\underbrace{X_t - X_{t-1}}_{\Delta X_t} = \underbrace{X_{t-1} - X_{t-2}}_{\Delta X_{t-1}} + e_t}_{\Delta X_t \sim I(1)} \Rightarrow \underbrace{\underbrace{\underbrace{\Delta X_t = \Delta X_{t-1}}_{\Delta X_t - \Delta X_{t-1} = \Delta^2 X_t} + e_t}_{\Delta^2 X_t = e_t}}_{\Delta^2 X_t \sim I(0)}$$

18

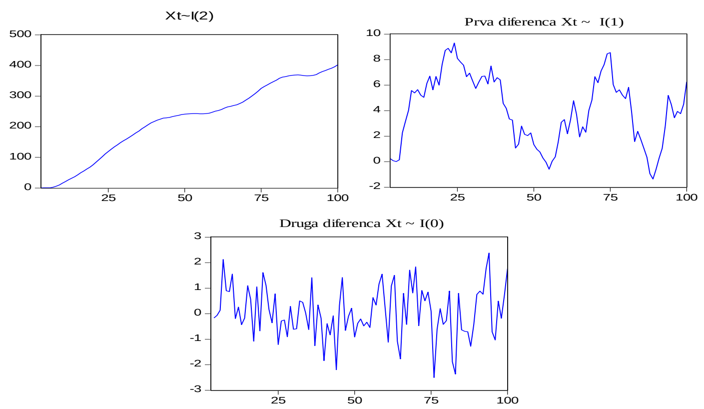
Kako izgleda vremenska serija sa dva jedinična korena? II

$$
\begin{aligned}
X_t = \; & e_t + e_{t-1} + e_{t-2} + \ldots + e_2 + e_1 + \\
& e_{t-1} + e_{t-2} + \ldots + e_2 + e_1 + \\
& e_{t-2} + \ldots + e_2 + e_1 + \\
& e_2 + e_1 + \\
& e_1
\end{aligned}
$$

$$X_t = \underbrace{e_t + 2e_{t-1} + 3e_{t-2} + \ldots + (t-1)e_2 + te_1}_{\sum_{s=1}^{t}\sum_{j=1}^{s} e_j}$$

19

Kako vizuelno izgleda vremenska serija sa dva jedinična korena?



20

Alternativni termini V:

- Slučajan hod (engl. random walk):
  - Klasičan slučajan hod
  - Slučajan hod sa konstantnim prirastom

21

Naziv	Forma	$E(\Delta Xt)$
Slučajan hod *klasični*	$X_t = X_{t-1} + e_t$ $X_0 = 0$	0
Slučajan hod *sa konstantnim prirastom*	$X_t = X_{t-1} + \beta + e_t$ $X_0 = 0$	β

22

Klasičan slučajan hod

$$X_t = X_{t-1} + e_t,\ \mathrm{E}(e_t) = 0,\ \mathrm{var}(e_t) = \sigma^2,\ \mathrm{E}(e_t e_{t-k}) = 0,\ k \neq 0.$$

$$X_t = \underbrace{X_{t-1}}_{X_{t-2}+e_{t-1}} + e_t$$

$$X_t = e_t + e_{t-1} + X_{t-2} = e_t + e_{t-1} + e_{t-2} + X_{t-3} = \dots$$

$$X_t = \underbrace{e_t + e_{t-1} + e_{t-2} + \dots + e_1}_{t} + \underbrace{X_0}_{0}$$

$$X_t = e_t + e_{t-1} + e_{t-2} + \dots + e_1$$

$$X_1 = e_1,\ \mathrm{var}(X_1) = \mathrm{var}(e_1) = \sigma^2$$

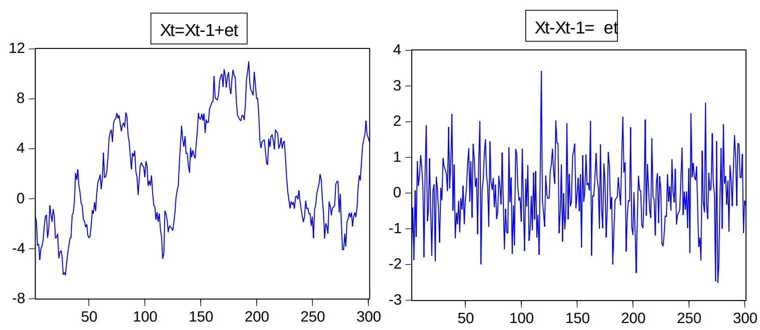
$$X_2 = e_2 + e_1,\ \mathrm{var}(X_2) = \mathrm{var}(e_2 + e_1) = 2\sigma^2$$

$$\dots$$

$$\mathrm{var}(X_t) = \mathrm{var}(e_t + e_{t-1} + e_{t-2} + \dots + e_1) = \underbrace{\sigma^2 + \sigma^2 + \dots + \sigma^2}_{t} = t\sigma^2.$$

23

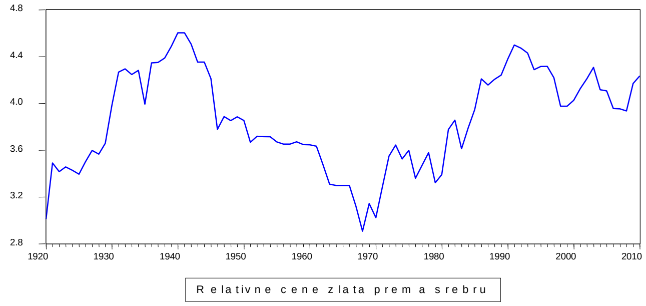
Klasičan slučajan hod II: grafički prikaz generisanih podataka



24

Klasičan slučajan hod III: primer iz praktične analize

- Period: 1920–2010. godina (91 godina, log vrednosti)



25

Klasičan slučajan hod IV: poznat udžbenički primer

- Dva igrača naizmenično bacaju pravilan i homogen novčić.
  - Ako padne pismo, onda svaki od igrača dobija 1 dinar.
  - Ukoliko padne grb, tada igrač daje drugom 1 dinar.
  - Neka je X_t dobitak datog igrača nakon t perioda.
- Pokazati da je X_t klasičan slučajan hod.

26

Slučajan hod u ekonomskim analizama: analiza efikasnosti finansijskog tržišta

- Koncept (slabe) efikasnosti finansijskog tržišta: prethodno kretanje stopa prinosa finansijskih instrumenata ne utiče na njihovo buduće kretanje.
- Na efikasnom finansijskom tržištu cene u svakom trenutku inkorporiraju sve faktore na strani ponude i potražnje, pa se menjaju samo sa pojavom nove vesti.
- Koncept efikasnog tržišta čini model slučajnog hoda relevantnim za opisivanje kretanja logaritma cena finansijskih instrumenata.

$$\ln P_t = \ln P_{t-1} + e_t \Rightarrow \ln P_t - \ln P_{t-1} = \Delta \ln P_t = e_t$$

- Ukoliko logaritam cena prati putanju slučajnog hoda, tada je odgovarajuća stopa prinosa (prva diferenca logaritma datih cena) jednaka procesu beli šum. To znači da do promene cena dolazi slučajno, i to isključivo kao rezultat nove informacije. Tada možemo smatrati da je finansijsko tržište efikasno.

27

Slučajan hod u ekonomskim analizama: analiza deviznog tržišta

- Teorija o paritetu kupovne snage: skup datih dobara treba da košta približno isto u različitim ekonomijama, ako se izuzmu transportni i drugi troškovi.
- Slobodno rečeno, u uslovima fluktuirajućeg kursa, deprecijacija valute aproksimativno je jednaka razlici između domaće i inostrane inflacije. Valjanost ove teorije, uz sva ograničenja, može se predstaviti na sledeći način:

$$P_t = EX_t P_t^*, \underbrace{(\ln EX_t - \ln P_t) + \ln P_t^*}_{\ln(\text{realni devizni kurs})} = 0$$

- V. serija *realni devizni kurs* treba da oscilira relativno pravilno tokom vremena da bi teorija o paritetu kupovne snage bila validna.
- Ako serija realni devizni kurs ima karakteristike slučajnog hoda, onda se data teorija ne može prihvatiti.

28

Slučajan hod u ekonomskim analizama: analiza dostignutog stepena konvergencije

- **Teorija privrednog rasta**: nivoi BDP *per capita* u dve zemlje međusobno konvergiraju ako je njihov količnik (razlika) stacionarna vremenska serija sa nultom srednjom vrednošću. U suprotnom, prisustvo j. korena sugeriše odsustvo tendencije ka konvergenciji.
- **Monetarna ekonomija**: za zemlje EMU (sa jedinstvenom valutom) konvergencija stopa inflacija značajna je kako bi jedinstvena monetarna politika ECB bila delotvorna na različitim tržištima. Prisustvo jediničnog korena u razlici parova stopa inflacije sugeriše da efikasnost monetarne politike nije obezbeđena.

29

Zašto je važno napraviti razliku između dve klase modela?

- Postoje dva osnovna razloga koji čine relevantnom podelu na stacionarne i nestacionarne veličine
  - Statistički
  - Ekonomski

30

Statistički razlozi

- Primena standardne statističke procedure nepouzdana je u regresionoj analizi vremenskih serija sa jediničnim korenom.
  - Ocene parametara dobijene primenom metoda ONK su pristrasne i nekonzistentne.
  - Ocene parametara dobijene primenom metoda ONK nemaju normalnu raspodelu. To znači da statističko zaključivanje zasnovano na t-odnosu i F-testu značajnosti koeficijenta determinacije nije tačno.
  - Moguća je pojava besmislene regresije. Ovim pojmom označava se regresija sa visokim vrednostima koeficijenta determinacije i t-odnosa (po modulu) između vremenskih serija sa jediničnim korenom, ali koje su potpuno nezavisne.

31

Značajna istraživanja

- Yule (1926)
  - Empirijska analiza; Udeo broja brakova sklopljenih u Engleskoj crkvi u odnosu na ukupan broj i mortalitet na 1000 osoba prema godišnjim podacima Engleske i Velsa u periodu: 1866-1911. (R2=**0.91**)
- Granger and Newbold (1974)
  - Simulaciona analiza
- Hendry (1980)
  - Empirijska analiza, Inflacija i kumulisana količina padavina u V. Britaniji prema kvartalnim podacima u periodu: 1964-1975. (R2=**0.99**)
- Phillips (1986)
  - TEORIJSKI DOKAZI

32

Jednostavan program za simulacije (broj ponavljanja 1000, obim uzorka 150, cilj: analiza vrednosti koef. determinacije)

```
workfile besmislena_reg  u 1000
series rr

!nreps=1000
!nobs=150
for !repc=1 to !nreps

smpl @first @first
series y1=0
series x1=0

smpl @first+1 !nobs+20
'Dva nekorelisana bela šuma'
series ay=nrnd
series ax =nrnd

'Dva nekorelisana slučajna hoda'
series y1=0.2+y1(-1)+ay
series x1=0.1+x1(-1)+ax

smpl @first+20 !nobs+20
equation eq1.ls y1 c x1

'Koeficijent determinacije R2'
rr(!repc)=@r2

next
smpl @first !nreps
```

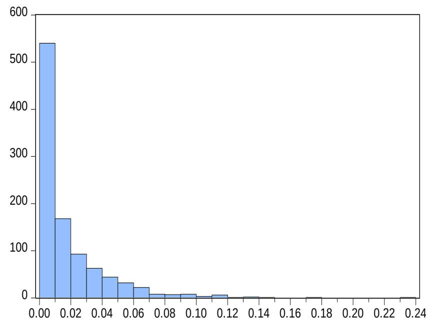
Prosečna vrednost koef. determinacije u nekim od simulacija

Simulacija	Tip serija	Prosečan koef.det.
1.	Dve nekorelisane stacionarne vremenske serije $X_t=0.6*X_{t-1}+ax_t$, $Y_t=0.7*Y_{t-1}+ay_t$	0.02
2.	Dve korelisane stacionarne vremenske serije $X_t=0.6*X_{t-1}+ax_t$, $Y_t=1+X_t+ay_t$	0.60
3.	Dva nekorelisana slučajna hoda $X_t=X_{t-1}+ax_t$, $Y_t=Y_{t-1}+ay_t$	0.24
4.	Dva nekorelisana slučajna hoda sa konst. prirastom $X_t=0.1+X_{t-1}+ax_t$, $Y_t=0.2+Y_{t-1}+ay_t$	0.52
4a.	Dva nekorelisana slučajna hoda sa konst. prirastom $X_t=0.5+X_{t-1}+ax_t$, $Y_t=0.2+Y_{t-1}+ay_t$	0.81

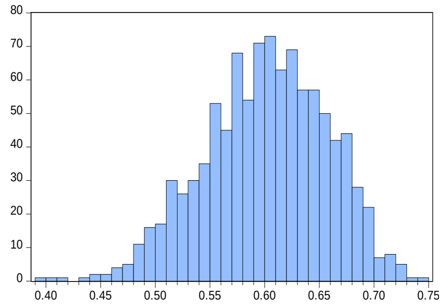
34

Simulacije 1. i 2. Histogrami koeficijenata determinacije

Simulacija 1.



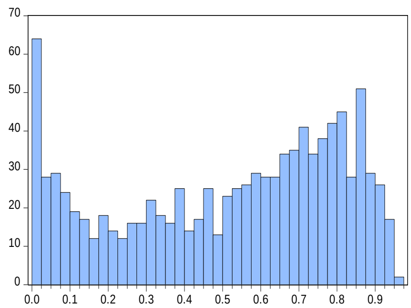
Simulacija 2.



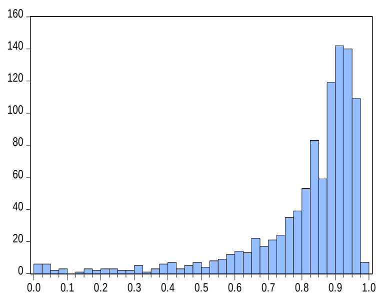
35

Simulacije 4. i 4a. Histogrami koeficijenta determinacije

Simulacija 4.



Simulacija 4a.



36

Ekonomski razlozi

- Razlika između vremenske serija sa i bez jediničnog korena ima jasnu ekonomsku implikaciju.
- Dok uticaj slučajnih šokova na nivo stacionarne vremenske serije slabi tokom vremena, efekat šoka na nivo vremenske serije sa jediničnim korenom ima trajno dejstvo za neodređeni period vremena.
- Ova razlika posebno dolazi do izražaja u teoriji poslovnih ciklusa: ako vremenska serija BDP sadrži jedinični koren, tada njeno odstupanje od dugoročnog trenda neće biti povremeno, kako naglašava tradicionalna teorija, već permanentno za neodređeni period vremena.
- Prisustvo jediničnog korena sugeriše da negativni šokovi iz faze recesije mogu trajno redukovati nivo BDP.

37

Ekonomski razlozi: pionirski rad

- Nelson and Plosser(1982), *Journal of Monetary Economics*
  - Jedan od prvih radova provere postojanja jediničnih korena u makroekonomskim veličinama
  - Realni i nominalni BDP privrede SAD poseduju jedinični koren
  - Ukupno je posmatrano 14 vremenskih serija i u većini je detektovano prisustvo jediničnog korena
  - Godišnji podaci u periodu: 1860(1909) – 1970.

38

Opšta forma: Autoregresioni modeli pokretnih proseka za integrisane vremenske serije

ARIMA(p,d,q) modeli

$$\Delta^d X_t = \phi_1 \Delta^d X_{t-1} + \phi_2 \Delta^d X_{t-2} + \ldots + \phi_p \Delta^d X_{t-p}$$
$$+ e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2} - \theta_q e_{t-q}$$

- *p* red autoregresione komponente
- *d* nivo integrisanosti vremenske serije i
- *q* red komponente pokretnih proseka.

39

Opšta forma: Autoregresioni modeli pokretnih proseka za integrisane vremenske serije

ARIMA(p,d,q) modeli II

$$\left(1-\phi_1 L-\phi_2 L^2-\ldots-\phi_p L^p\right)(1-L)^d X_t=\left(1-\theta_1 L-\theta_2 L^2-\ldots-\theta_q L^q\right)e_t$$

- *p* red autoregresione komponente
- *d* nivo integrisanosti vremenske serije i
- *q* red komponente pokretnih proseka.

40

ARIMA(p,d,q) model: primeri

$ARIMA(p,1,q):$

$$\Delta X_t = \phi_1 \Delta X_{t-1} + \phi_2 \Delta X_{t-2} + \ldots + \phi_p \Delta X_{t-p} + e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2} - \theta_q e_{t-q}$$

$ARIMA(p,2,q):$

$$\Delta^2 X_t = \phi_1 \Delta^2 X_{t-1} + \phi_2 \Delta^2 X_{t-2} + \ldots + \phi_p \Delta^2 X_{t-p} + e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2} - \theta_q e_{t-q}$$

AR(p)	MA(q)	ARMA(p,q)	Beli šum	Slučajan hod
ARIMA(p,0,0)	ARIMA(0,0,q)	ARIMA(p,0,q)	ARIMA(0,0,0)	ARIMA(0,1,0)

41

ARIMA(p,d,q) model: konkretni primeri

Model	Zapis
$(1-L)X_t = 0.4 + (1+0.3L+0.1L^2)e_t$	ARIMA(0,1,2)
$\Delta X_t = 0.5\Delta X_{t-1} + e_t$	ARIMA(1,1,0)
$X_t = 2X_{t-1} - X_{t-2} + e_t$	ARIMA(0,2,0)
$(1+0.2L-0.5L^2)(1-L)^2 X_t = (1-0.7L)e_t$	ARIMA(2,2,1)
$(1-0.1L-0.3L^2-0.2L^3)X_t = e_t$	ARIMA(3,0,0)

42