Autoregresioni modeli pokretnih proseka (ARMA modeli)

Ekonometrijska analiza vremenskih serija

Predavač: Aleksandra Nojković

Struktura predavanja

- ARMA modeli – opšta forma
- ARMA (1,1) model

ARMA (p,q) modeli

- Opšta forma autoregresionih modela pokretnih proseka je:

$$\underbrace{\left(1-\phi_1 L-\phi_2 L^2-\ldots-\phi_p L^p\right)}_{\Phi(L)} X_t=\underbrace{\left(1-\theta_1 L-\theta_2 L^2-\ldots-\theta_q L^q\right)}_{\Theta(L)} e_t$$

- Za ove modele koristi se oznaka ARMA(p,q) model, gde je p red autoregresione komponenete i q red komponente pokretnih proseka.

ARMA (p,q) model se može predstaviti i kao:

$$X_t=\phi_1 X_{t-1}+\phi_2 X_{t-2}+\ldots+\phi_p X_{t-p}+e_t-\theta_1 e_{t-1}-\theta_2 e_{t-2}-\ldots-\theta_q e_{t-q}$$

ARMA (p,q) modeli (II)

- ARMA klasa modela se izvode iz linearnog procesa prema:

$$X_t = e_t + \psi_1 e_{t-1} + \psi_2 e_{t-2} + \ldots$$
$$X_t = \underbrace{\left(1 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \ldots\right)}_{\psi(L)} e_t$$

pri čemu se polinom beskonačnog reda $\psi(L)$ može predstaviti kao količnik dva polinoma konačnog reda:

$$\underbrace{\left(1 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \ldots\right)}_{\psi(L)} = \frac{\overbrace{\left(1 - \theta_1 L - \theta_2 L^2 - \ldots - \theta_q L^q\right)}^{\Theta(L)}}{\underbrace{\left(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \ldots - \phi_p L^p\right)}_{\Phi(L)}}$$

Svojstva obične autokorelacione funkcije ARMA (p,q) modela

- Prvih q autokorelacionih koeficijenata vremenske serije generisane ARMA(p,q) modelom zavisi od parametara AR i MA komponente.

- Za docnje koje su veće od reda MA komponente, q+1, q+2, itd., ova funkcija ponaša se isto kao kod AR modela.

Svojstva parcijalne autokorelacione funkcije ARMA(p,q) modela

- Na docnjama 1,2,..,p parcijalni autokorelacioni koeficijenti zavise od svih parametara modela, odnosno AR i MA komponente.

- Za docnje veće od reda AR komponente, p+1, p+2, itd., parcijalni autokorelacioni koeficijenti slede svojstva parcijalne autokorelacione funkcije MA klase modela.

ARMA(1,1) model

- Reč je o modelu oblika:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + e_t - \theta_1 e_{t-1}$$

- Uslov stacionarnosti ARMA(1,1) modela svodi se na uslov stacionarnosti AR(1) modela, odnosno uslov $|\phi_1| < 1$.

- Uslov invertibilnosti proizilazi iz odgovarajućeg ograničenja parametra MA komponente, odnosno uslov $|\theta_1| < 1$.

Veza ARMA(1,1) modela sa linearnim procesom

- Parametri linearnog procesa mogu se odrediti na osnovu parametara ARMA (1,1) modela na sledeči način (pokazati!):

$$\psi_j = \phi_1^{j-1}(\phi_1 - \theta_1), j = 1,2,...$$

Varijansa i autokovarijaciona funkcija ARMA (1,1) modela

- Varijansa ARMA (1,1) modela:

$$\gamma_0 = \frac{\left(1 - 2\phi_1\theta_1 + \theta_1^2\right)}{\left(1 - \phi_1^2\right)}\sigma^2$$

- Autokovarijaciona funkcija:

$$\gamma_k = \begin{cases} \dfrac{\left(1 - 2\phi_1\theta_1 + \theta_1^2\right)}{\left(1 - \phi_1^2\right)}\sigma^2, & k = 0 \\ \dfrac{(\phi_1 - \theta_1)(1 - \phi_1\theta_1)}{1 - \phi_1^2}\sigma^2, & k = 1 \\ \phi_1\gamma_{k-1}, & k > 1 \end{cases}$$

Obična i parcialna autokorelaciona funkcija ARMA(1,1) modela

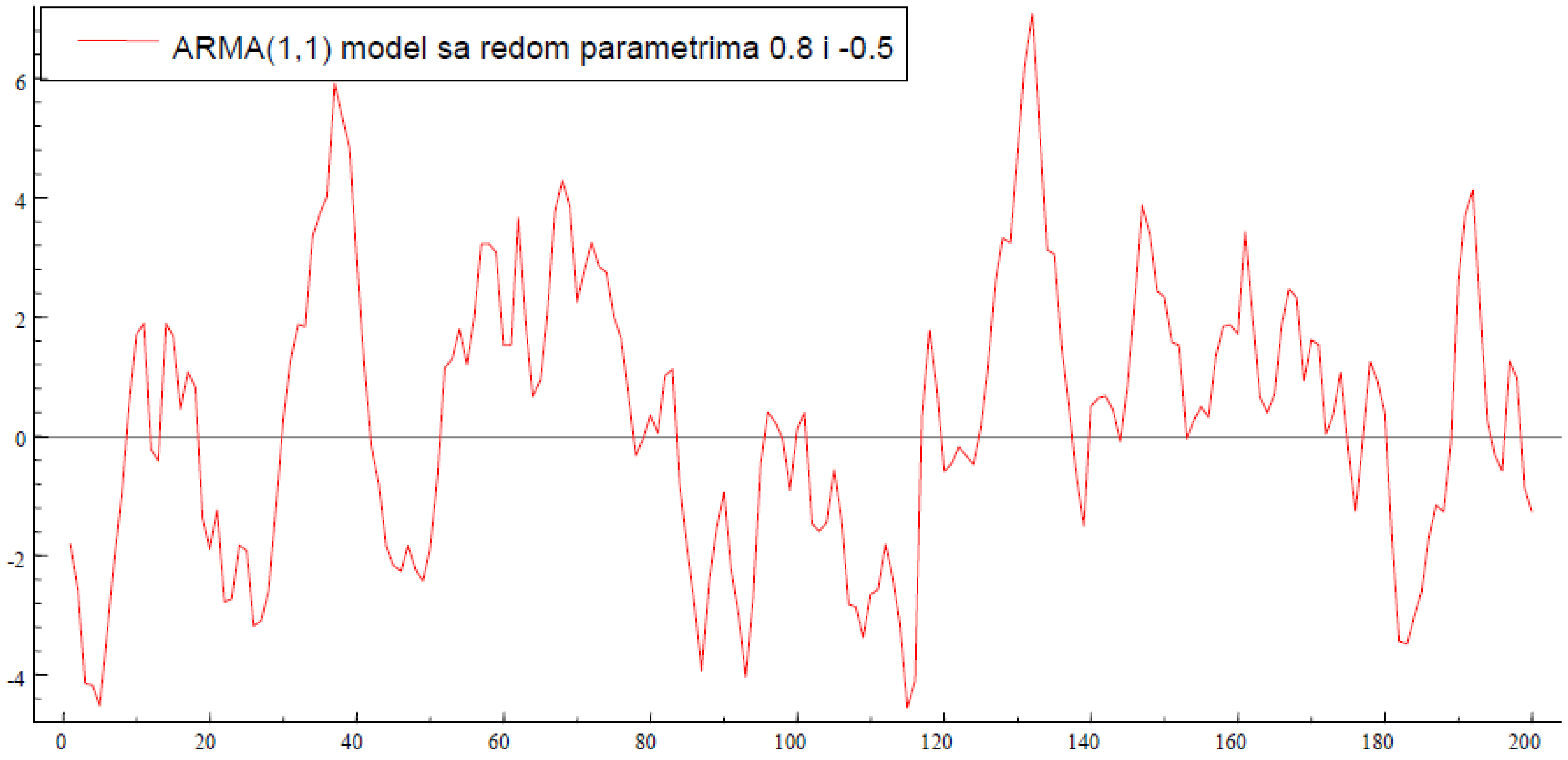
- Za običnu autokorelacionu funkciju izvodi se:

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ \dfrac{(\phi_1 - \theta_1)(1 - \phi_1 \theta_1)}{1 - 2\phi_1 \theta_1 + \theta_1^2} & k = 1 \\ \phi_1 \rho_{k-1} & k > 1. \end{cases}$$

- Za prvi parcijalni autokorelacioni koeficijenat važi: $\phi_{11} = \rho_1$, dok za docnje veće od 1 (što je red AR dela modela), ova funkcija prati putanju parcijalne autokorelacione funkcije MA modela.

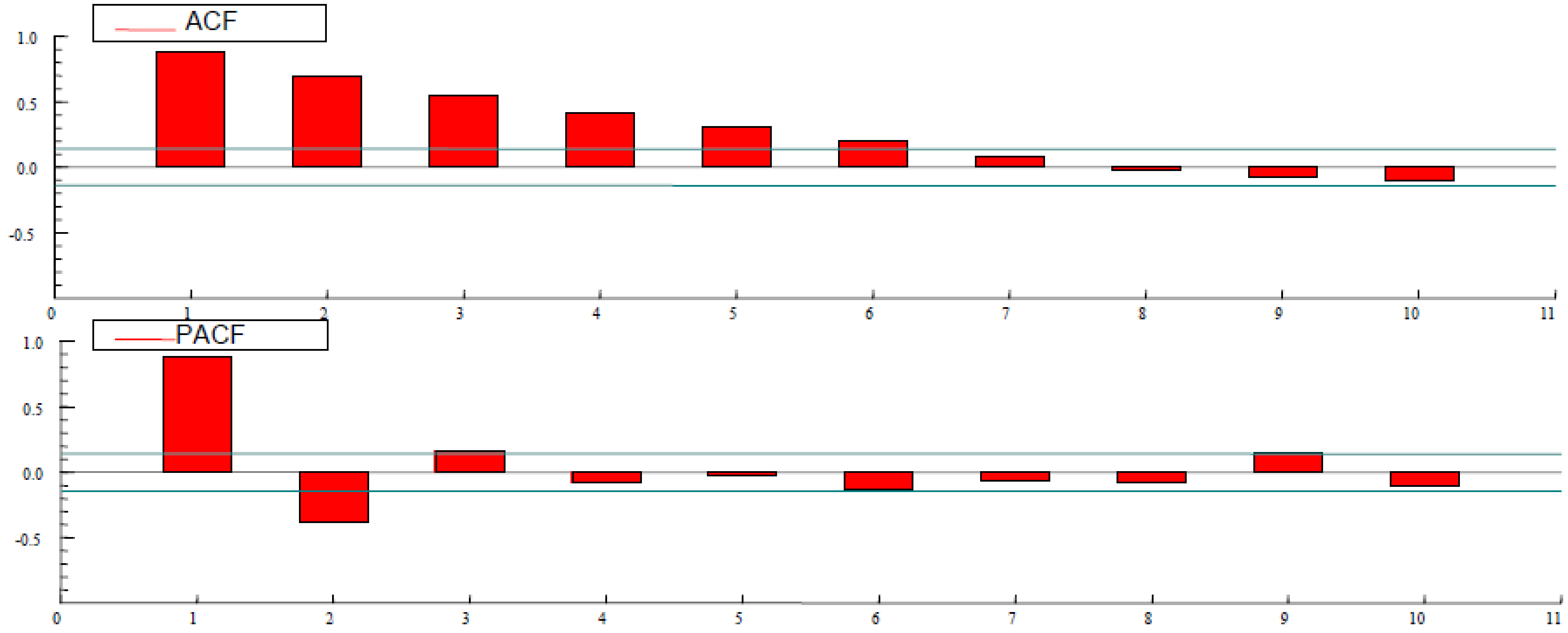
Primer 6.1 - Grafik ARMA(1,1) sa parametrima 0.8 i -0.5

$$X_t = 0.8X_{t-1} + e_t + 0.5e_{t-1}.$$



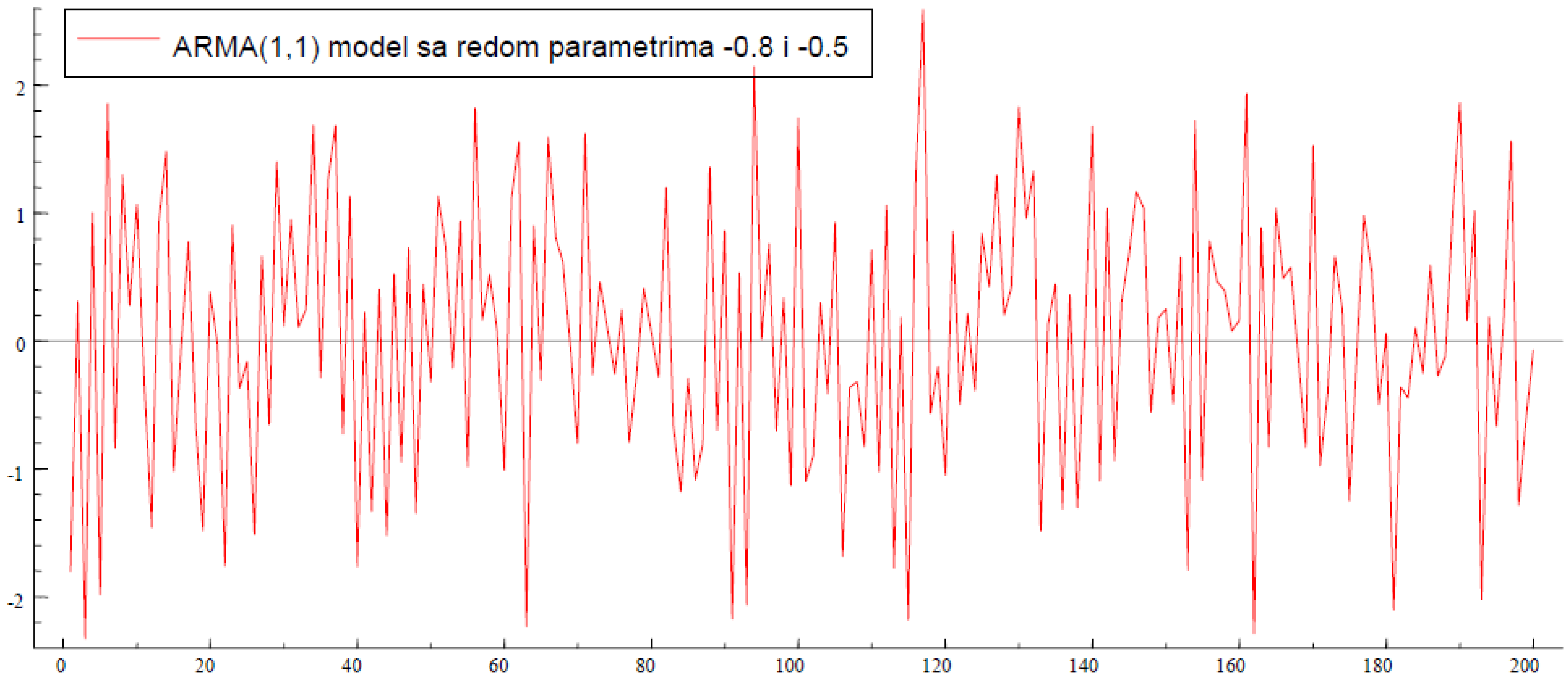
Uzorački i parcijalni korelogram modela:

$$X_t = 0.8X_{t-1} + e_t + 0.5e_{t-1}.$$



Grafik ARMA(1,1) sa parametrima -0.8 i -0.5

$$X_t = -0.8X_{t-1} + e_t + 0.5e_{t-1}$$



Uzorački i parcijalni korelogram modela:

$$X_t = -0.8X_{t-1} + e_t + 0.5e_{t-1}$$