

Diki-Fulerov test jediničnog korena

Zorica Mladenović

1

Dickey-Fuller-ov test jediničnog korena

- Osnovna ideja
- Različite determinističke komponente
- Izračunavanje test-statistike
- Pravilo odlučivanja
- Određivanje broja jediničnih korena
- Algoritam testiranja
- Prošireni test
- Nedostaci

2

Dickey-Fuller-ov (DF) test jediničnog korena: uvod

- Polazni model:

$$X_t = \phi X_{t-1} + e_t$$
- Hipoteze:
 H_0 : Serija poseduje jedinični koren, $\phi=1, X_t \sim I(1)$
 H_1 : Serija je stacionarna (oko nule), $\phi < 1, X_t \sim I(0)$
- Alternativna specifikacija polaznog modela:

$$\Delta X_t = \varphi X_{t-1} + e_t, \phi=1 = \varphi$$
tako da hipoteze postaju:
 H_0 : Serija poseduje jedinični koren, $\varphi=0, X_t \sim I(1)$
 H_1 : Serija je stacionarna, $\varphi < 0, X_t \sim I(0)$

3

DF test za različite determinističke komponente

DF test	τ	τ_μ	τ_t
Determinističke komponente	Nema	Konstanta	Konstanta+ Linearni trend
$E(X_t)$	0	μ	$\mu+bt, t=1,2,\dots$

*$b > 0$, konstantni prirast (uklon)
 $\Delta X_t = b + \text{greska}, X_t = b + X_{t-1} + \text{greska}$
Parametar uz t u očekivanoj vrednosti vremenske serije odgovara "slobodnom članu" u modelu prve diference serije sa jediničnim korenom*

4

DF test za različite determinističke komponente II

- Tri varijante Dickey Fuller-ovog testa (DF test): τ , τ_μ , τ_t
- Nulta (H_0) i alternativna (H_1) hipoteza:

- i) τ $H_0: X_t = X_{t-1} + e_t$, Serija je slučajan hod
 $H_1: X_t = \phi X_{t-1} + e_t$, $\phi < 1$, Serija je stacionarna oko nule.
- ii) τ_μ $H_0: X_t = X_{t-1} + e_t$, Serija je slučajan hod
 $H_1: X_t = \phi X_{t-1} + konstanta + e_t$, $\phi < 1$,
 Serija je stacionarna oko nenulte srednje vrednosti
- iii) τ_t $H_0: X_t = b + X_{t-1} + e_t$
 Serija je slučajan hod sa konstantnim prirastom
 $H_1: X_t = \phi X_{t-1} + konstanta + trend + e_t$, $\phi < 1$,
 Serija je trend-stacionarna

5

Kako se dolazi do vrednosti DF test statistika za različite determinističke komponente?

Varijante DF testa	Odgovarajući model
τ	$\Delta X_t = \phi X_{t-1} + e_t$
τ_μ	$\Delta X_t = \phi X_{t-1} + \beta_0 + e_t$
τ_t	$\Delta X_t = \phi X_{t-1} + \beta_0 + \beta t + e_t$

6

Računanje DF statistike

- Primenom metoda ONK ocenjen je model:

$$\Delta \hat{X}_t = \hat{\phi} X_{t-1} + \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 t$$

$$s(\hat{\phi})$$

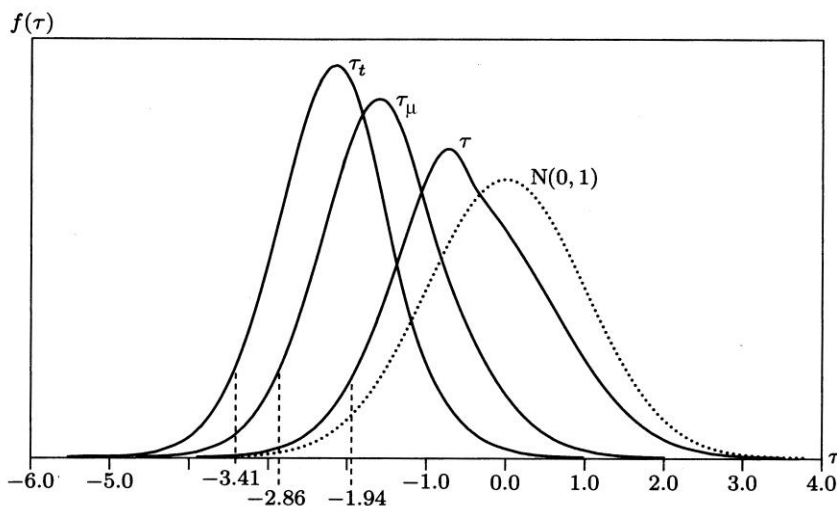
- DF test-statistika je količnik ocene parametra ϕ i odgovarajuće standardne greške te ocene:**

$$DF = \tau_t = \frac{\hat{\phi}}{s(\hat{\phi})}$$

- DF test statistika ima formu standardnog t -odnosa.
- DF test statistika nema t -raspodelu u uslovima istinitosti nulte hipoteze.
- DF test statistika poseduje nestandardnu raspodelu, koju su odredili Dickey i Fuller.
- Kritične vrednosti: Fuller (1976) i MacKinnon (1991).

7

Funkcije gustine tri varijante DF test-statistika za uzorak velikog obima



Pravilo odlučivanja

Kritična vrednost za nivo značajnosti 5%	τ	τ_{μ}	τ_t
$T=\infty$	-1.94	-2.86	-3.41

- Nulta hipoteza o postojanju jediničnog korena se odbacuje za dovoljno malu vrednost statistike (kada je izračunata vrednost manja od kritične).
- Nulta hipoteza o postojanju jediničnog korena se prihvata za dovoljno veliku vrednost statistike (kada je izračunata vrednost veća od kritične).

9

Određivanje kritičnih vrednosti uz nivo značajnosti 5% za konkretnu dužinu (T) vremenske serije

$$\tau^k = -1.9393 - \frac{0.398}{T}$$

$$\tau_{\mu}^k = -2.8621 - \frac{2.738}{T} - \frac{8.36}{T^2}$$

$$\tau_t^k = -3.4126 - \frac{4.039}{T} - \frac{17.83}{T^2}$$

10

Određivanje broja jediničnih korena I

- Ako je H_0 prihvaćeno kao tačno, onda se zaključuje da je serija integrisana prvog reda, $X_t \sim I(1)$.
- Međutim, potrebno je utvrditi da li je broj jediničnih korena tačno jedan ili eventualno dva.
- Nastavljamo testiranje:

$$H_0: X_t \sim I(2) \text{ protiv } H_1: X_t \sim I(1)$$

$$H_0: \Delta X_t \sim I(1) \text{ protiv } H_1: \Delta X_t \sim I(0).$$

- Sada je polazna serija u analizi ΔX_t .
- Relevantna specifikacija:

$$\begin{aligned} \Delta X_t &= \phi \Delta X_{t-1} + \beta_0 + \beta t + e_t / - \Delta X_{t-1} \\ \Delta \Delta X_t &= \phi \Delta X_{t-1} + \beta_0 + \beta t + e_t, \phi = 1 = \phi \\ \Delta^2 X_t &= \phi \Delta X_{t-1} + \beta_0 + \beta t + e_t \end{aligned}$$

- **Ocenjujemo $\Delta^2 X_t$ u zavisnosti od: ΔX_{t-1} , konstante i trenda. Proveravamo da li je t-odnos za ocenu uz ΔX_{t-1} veći ili manji od odgovarajuće kritične vrednosti DF testa.**

11

Određivanje broja jediničnih korena II

- Ako je H_0 odbačeno, onda se zaključuje da je serija $X_t \sim I(1)$, odnosno da poseduje tačno jedan jedinični koren.
- Ako je H_0 prihvaćeno kao tačno, onda se zaključuje da je serija integrisana drugog reda, $X_t \sim I(2)$.
- Potrebno je utvrditi da li je broj jediničnih korena tačno dva ili eventualno tri.
- Nastavljamo testiranje:

$$H_0: X_t \sim I(3) \text{ protiv } H_1: X_t \sim I(2)$$

$$H_0: \Delta^2 X_t \sim I(1) \text{ protiv } H_1: \Delta^2 X_t \sim I(0).$$

- Sada je polazna serija u analizi $\Delta^2 X_t$.

$$\begin{aligned} \Delta^2 X_t &= \phi \Delta^2 X_{t-1} + \beta_0 + \beta t + e_t / - \Delta^2 X_{t-1} \\ \Delta \Delta^2 X_t &= \phi \Delta^2 X_{t-1} + \beta_0 + \beta t + e_t, \phi = 1 = \phi \\ \Delta^3 X_t &= \phi \Delta^2 X_{t-1} + \beta_0 + \beta t + e_t \end{aligned}$$

- **Ocenjujemo $\Delta^3 X_t$ u zavisnosti od: $\Delta^2 X_{t-1}$, konstante i trenda. Proveravamo da li je t-odnos za ocenu uz $\Delta^2 X_{t-1}$ veći ili manji od odgovarajuće kritične vrednosti DF testa.**
- DF manje od kritične vrednosti, $H_1: X_t \sim I(2)$ se prihvata.
- DF veće od kritične vrednosti, $H_0: X_t \sim I(3)$ se prihvata. Testiranje se nastavlja....

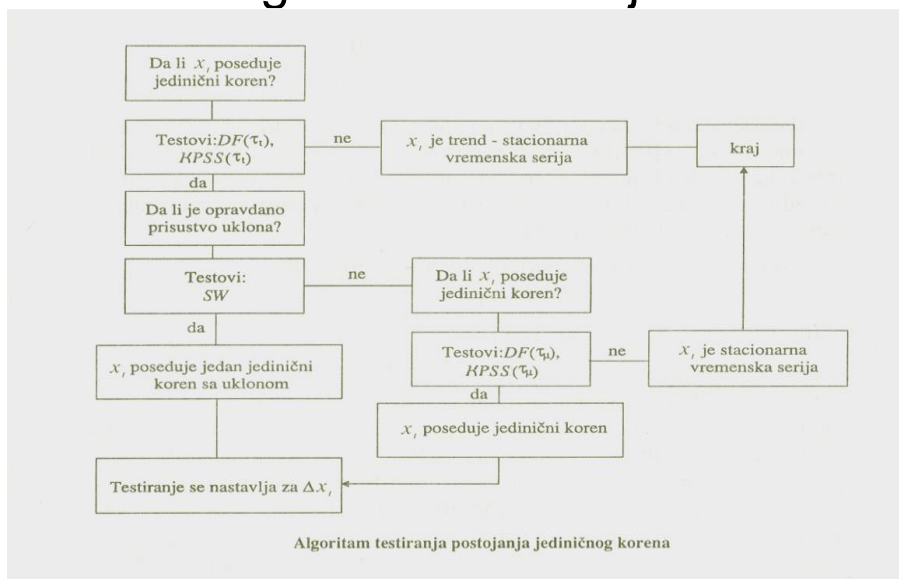
12

Algoritam testiranja I

- I korak: Primenuje se τ_t statistika
 - $\tau_t > \tau_t^k \Rightarrow$ Postoji bar jedan jedinični koren
 - $\tau_t < \tau_t^k \Rightarrow$ **Seriya je trend-stacionarna.**
- Ako je $\tau_t > \tau_t^k$ prelazimo na II korak:
 Da li u seriji postoji konstantni prirast?
 - SW (Stok-Votsonov) test:
 - Da li je srednja vrednost ΔX_t različita od nule?
 - II-1. DA: **Seriya ima jedan jedinični koren sa prirastom.**
 - II-2. NE: Ponavljamo testiranje ali prema τ_μ
- III korak:
 - Iz II-1. Da li postoji i drugi jedinični koren?
 - Iz II-2. Da li serija ima jedan koren, ali bez konstantnog prirasta?

13

Algoritam testiranja II



Prošireni DF test Augmented DF test, ADF(K)

- $\Delta X_t = \beta_0 + \beta t + \varphi X_{t-1} + \delta_1 \Delta X_{t-1} + \delta_2 \Delta X_{t-2} + \dots + \delta_K \Delta X_{t-K} + e_t$
- ADF test je količnik ocene parametra φ i odgovarajuće standardne greške ocene.
- ADF i DF imaju istu graničnu raspodelu: koristimo iste kritične vrednosti
- Parametar **K** može se odrediti na više načina:
 - Metod od posebnog ka opštem
 - Metod od opšteg ka posebnom
 - Informacioni kriterijumi.

15

Informacioni kriterijum (oznaka IC)

- Koristi se u izboru optimalnog broja parametara u ekonometrijskom modelu
- Sadrži dve komponente:
 1. Komponenta koja je funkcija neobjašnjenog varijabiliteta zavisne promenljive modela
 2. Komponenta kojom se “kažnjava” gubitak broja stepeni slobode zbog dodavanja novih parametara (tzv. kaznena komponenta)

17

Informacioni kriterijum II

- Definicija u kontekstu izbora K :

$$IC(K) = \ln[s^2(K)] + g \frac{(K+3)}{T}$$

- g nenegativna funkcija (kaznena)
- $s^2(K)$ je ocena varijanse slučajne greške modela.
- Dodavanje novih objašnjavajućih promenljivih (rast K) ima suprotne efekte na dve komponente:
 - varijabilitet slučajne greške modela opada
 - vrednost kaznene komponente raste.
- **Cilj je da se izabere takvo K kojim se minimizira vrednost IC**

18

Vrste informacionih kriterijuma

Funkcija g	Kaznena komponenta	Naziv	Oznaka
2	$2(K+3)/T$	Akaike	AIC
$\ln T$	$(\ln T)(K+3)/T$	Schwarz	SC ili SIC
$2\ln \ln T$	$(2\ln \ln T)(K+3)/T$	Hannan-Quinn	HQC ili HQIC

19

Odnos između informacionih kriterijuma

$$T \geq 8, \ln T > 2 \Rightarrow SC > AIC$$

$$T \geq 16, 2 \ln \ln T > 2 \Rightarrow HQ > AIC$$

$$T \geq 16, SC > HQ > AIC$$

Napomena

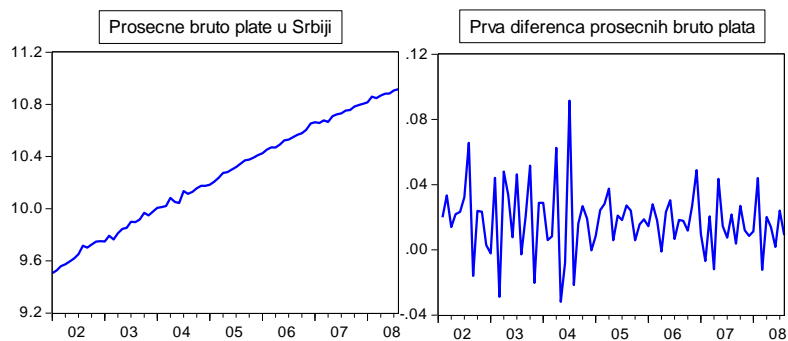
$$\ln 8 = 2.08$$

$$\ln 16 = 2.77$$

$$2 \ln \ln 16 = 2.04$$

20

Primer:
Prosečne bruto plate u Srbiji, 2002:1-2008:8
(desezonirani podaci, log vrednosti)



21

Primer: rezultati ADF testa

I faza: Primena testa iz modela sa konstantom i trendom	II faza: Opravdanost primene polazne varijante testa	III faza: Provera prisustva drugog j. korena
$H_0: X_t \sim I(1)$ $H_1: X_t \sim I(0)$ $ADF(2) = -1.79$, $\tau_t^k = -3.47$ $-1.79 > -3.47$	$H_0: E(\Delta X_t) = 0$, $H_1: E(\Delta X_t) \neq 0$ $SW = 12.6 > 1.96$	$H_0: \Delta X_t \sim I(1)$ $H_1: \Delta X_t \sim I(0)$ $ADF(1) = -12.23$ $-12.23 < -3.47$
H_0 se ne odbacuje.	H_0 se odbacuje.	H_0 se odbacuje.
Seriya ima bar jedan jedinični koren.	Seriya ima jedan jedinični koren sa konstantnim prirastom.	Prva diferencna serije je stacionarna.
	Nastavljamo sa upotrebom τ_t statistike.	Polazna serija ima tačno jedan jedinični koren.

Osnovno ograničenje ADF testa

- Ako je serija stacionarna sa autoregresionim parametrom koji je blizak vrednosti 1, onda se primenom ADF testa u najvećem broju slučajeva dobija rezultat da postoji jedinični koren.
- Testom ne može da se diskriminiše da li je $\phi = 1$ ili $\phi = 0.95$, posebno na uzrocima malog obima.
- Ako je serija generisana kao

$$X_t = 0.95X_{t-1} + e_t$$
 onda bi testom morala da se odbaci nulta hipoteza o prisustvu jediničnog korena.
- Jedan od načina da se prevaziđe dati problem jeste da se nulta hipoteza definiše kao tvrđenje o stacionarnosti.

Nulta hipoteza o stacionarnosti

- Alternativna postavka hipoteza
 - H_0 : X_t je stacionarna vremenska serija
 - H_1 : X_t poseduje jedinični koren
- KPSS test
- (Kwiatkowski, Phillips, Schmidt and Shin, 1992).
- Paralelna upotreba ADF i KPSS testa povećava pouzdanost statističkog zaključivanja.

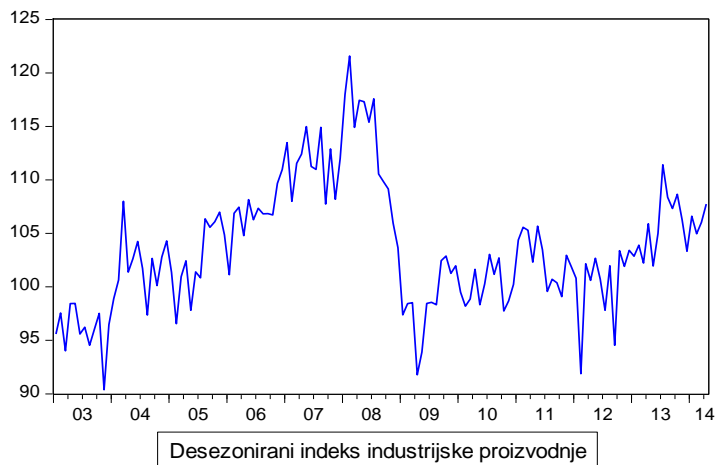
24

Dodatna ograničenja ADF testa

- Test je osetljiv na postojanje strukturnog loma
- Trajan strukturni lom u trendu stacionarne vremenske serije: primena ADF testa sugerise postojanje jediničnog korena.
- Jednokratni strukturni lom u prvoj diferenciji seriji sa jediničnim korenom: primena ADF testa sugerise stacionarnost polazne serije.

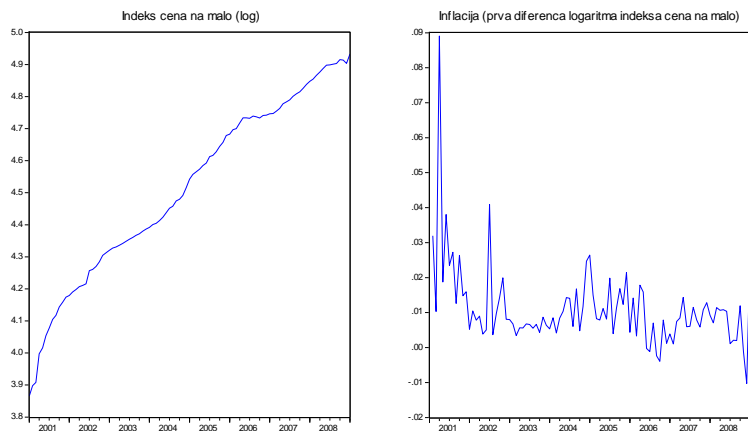
25

Primer I Desezonirani indeks industrijske proizvodnje u Srbiji 2003:1 – 2014:4



26

Primer II Indeks cena na malo privrede Srbije - log 2001:1- 2009:1



27