Ekonometrijska analiza vremenskih serija– Deo II (8)

Osnovne studije

Predavač: Aleksandra Nojković

Ocenjivanje parametara ARMA modela

- **Struktura predavanja:**

- Primena metoda ONK u ocenjivanju parametara AR modela
- Primena metoda ONK u ocenjivanju parametara MA i ARMA modela
- Metod NNK
- Metode numeričke optimizacije (metod MV)
- **Metod momenata**

Opšta ideja metoda numeričke optimizacije

- Za određivanje parametri u nelinearnim specifikacijama najčešće se primenjuju **metode numeričke optimizacije**.

- Iterativna procedura koja se sastoji od sledećih koraka:

1. Izbor inicijalnih vrednosti za nepoznate parametre
2. Obrazovanje niza poboljšanih ocena
3. Završetak procedure kada je dalje unapređenje zanemarljivo malo.

Opšta ideja metoda numeričke optimizacije (II)

- Najčešće se primenjuje Newton –Raphson-ov metod optimizacije.
- Potrebno je naći minimalnu vrednost nelinearne funkcije f(θ).
- Neka je θ_m vrednost za koju data funkcija dostiže ekstremnu vrednost.
- Datu funkciju svodimo na linearnu korišćenjem Tejlorovog razvoja u red (razvoj drugog reda u okolini θ_m):

$$f(\theta) \approx f(\theta_m) + (\theta - \theta_m)\underbrace{f'(\theta_m)}_{0} + \frac{1}{2}(\theta - \theta_m)^2 f''(\theta_m) = f(\theta_m) + \frac{1}{2}(\theta - \theta_m)^2 f''(\theta_m).$$

Opšta ideja metoda numeričke optimizacije (III)

- Iz uslova izjednačavanja prvog uslova sa nulom određujemo ocenu θ_m:

$$f'(\theta) = \underbrace{f'(\theta_m)}_{0} + (\theta - \theta_m)\, f''(\theta_m) = 0 \Rightarrow \theta_m = \theta - \frac{f'(\theta)}{f''(\theta_m)}$$

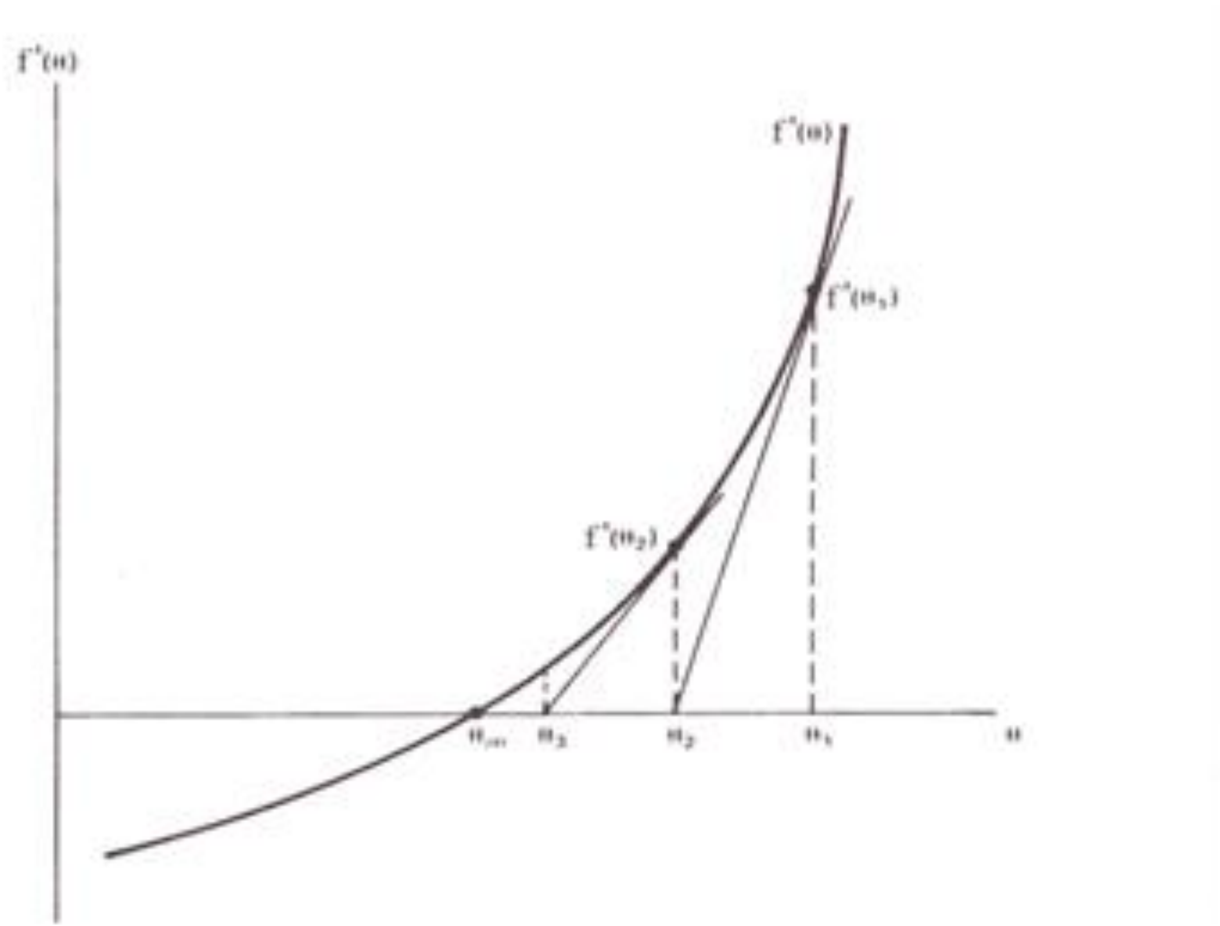
- Odgovarajućom iterativnom šemom sugeriše se izvođenje ocene θ^j u j-toj iteraciji kao:

$$\theta^j = \theta^{(j-1)} - \frac{f'\left(\theta^{(j-1)}\right)}{f''\left(\theta^{(j-1)}\right)}$$

gde je $\theta^{(j-1)}$ ocena iz prethodne (j-1) iteracije.

- Za konačnu ocenu biramo ocenu θ_m, koja se ne razlikuje značajno od ocene u prethodnoj iteraciji.

Grafički prikaz Newton-Raphson-ovog metoda optimizacije



Opšta ideja metoda numeričke optimizacije (IV)

- Ako razmatramo funkciju više nepoznatih parametara f(Θ), obuhvaćene vektorom Θ, tada je odgovarajući razvoj Tejlorovog reda (tražene ocene su sadržane u Θ_m) :

$$f'(\Theta) \approx f(\Theta_m) + (\Theta - \Theta_m)' g(\Theta) + \frac{1}{2}(\Theta - \Theta_m)' H(\Theta_m)(\Theta - \Theta_m).$$

- Sa g(Θ) je označen vektor prvih izvoda (vektor gradijenata), a sa H(Θ) matrica drugih izvoda (Hesijanova matrica).

- Najčešće se koriste Markatov (eng. Marquardt) algoritam i BHHH algoritam (engl. Berndt, Hall, Hall, Hausman) algoritam.

Metod maksimalne verodostojnosti

- Koristi se za ocene ARMA modela.
- Uz pretpostavku da je greška modela Gausov beli šum, metod MV obezbeđuje konzistentne ocene koje asimptotski poseduju normalnu raspodelu.
- Metodom **uslovne MV** uzima se u obzir rezidualna suma kvadrata koja se formira prema efektivnog skupa podataka.
- Ako imamo T podataka i ocenjujemo (p+q) parametara ARMA modela.
- Efektivni uzorak (T-max(p,q)), a broj stepeni slobode (T-max(p,q) – p- q).

Metod maksimalne verodostojnosti (II)

- **Tačan metod** MV (metod **bezuslovne MV**) zasniva se na analizi raspoloživih T podataka. Imajući u vidu da je i broj stepeni slobode T, neophodno je rekonstruisati početne vrednosti slučajnih grešaka e_0, e_{-1}, ..., e_{-1+q}, i početne vrednosti opservacija X_0, X_{-1},..., X_{-1+q}, kako ne bi došlo do gubitka u broju stepeni slobode prilikom ocena q i p parametara.

- Određivanje početnih vrednosti može se ostvariti na dva načina:

1. Inicijalna vrednost sl. grešaka se izjednačava sa nulom. Dok se inicijalne vrednosti opservacija vremenske serije izjednačava sa aritmetičkom sredinom (metod MV se svodi na metod NNK pod uslovom da je greška Gausov beli šum).
2. Nepoznate inicijalne vrednosti ocenjuju se na osnovu postupka prognoziranja unazad (engl. backforecastig ili backcasting).

Metod momenata

- Najčešće se koristi za dobijanje početnih ocena ARMA modela.

- Osnovni postupak metoda momenata:

1. Uspostavlja se veza između teorijskih momenata i parametara modela.
2. Ocene momenata iz uzorka se izjednačavaju sa teorijskim momentima.
3. Izjednačavaju se ocene momenata sa teorijskim momentima, koje su funkcija parametara – nepoznati parametri se zamenjuju ocenama.

Postupak ocenjivanja nepoznatih parametara

1) Teorijski momenti = funkcija (nepoznati parametri modela)

2) Ocena momenata = teorijski momenti

3) Ocene momenata = funkcija (ocena parametara modela).

Ocena srednje vrednosti i varijanse vremenske serije

- Na osnovu podataka X_1, X_2, …, X_T treba oceniti parametre sledećeg ARMA modela:

$$\left(1-\phi_1 L-\phi_2 L^2-\ldots-\phi_p L^p\right)\left(X_t-\mu\right)=\left(1-\theta_1 L-\theta_2 L^2-\ldots-\theta_q L^q\right)e_t,\ e_t : N\left(0,\sigma^2\right).$$

- Ocena srednje vrednosti dobija se prema aritmetičkoj sredini:

$$\hat{\mu}=\overline{X}=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}X_t$$

- Ocena varijanse dobija se kao:

$$\hat{\gamma}_0=s^2=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(X_t-\overline{X}\right)^2$$

Ocene AR(1) modela metodom momenata

- Model oblika:

$$\left(X_t - \mu\right) = \phi_1\left(X_{t-1} - \mu\right) + e_t,$$

pri čemu su nepoznati parametri $\mu, \phi_1 \text{ i } \sigma^2.$

- U AR (1) modelu važi: $\rho_k = \phi_1^k$,odnosno $\rho_1 = \phi_1$.

- Na osnovu ocenjene vrednosti aritm. sredine možemo dobiti ocenu običnog autokorelacionog koeficijenta:

$$\hat{\rho}_1 = \frac{\sum_{t=2}^{T}\left(X_t - \overline{X}\right)\left(X_{t-1} - \overline{X}\right)}{\sum_{t=1}^{T}\left(X_t - \overline{X}\right)^2}.$$

- Ovu ocenu označićemo sa r1.

Ocene AR(1) modela metodom momenata (II)

- Na osnovu toga dobijamo ocene parametra Φ_1:

$$\left.\begin{aligned}
&\rho_1 = \phi_1 \\
&\hat{\rho}_1 = r_1 = \frac{\sum_{t=2}^{T}\left(X_t - \overline{X}\right)\left(X_{t-1} - \overline{X}\right)}{\sum_{t=1}^{T}\left(X_t - \overline{X}\right)^2} \\
&\rho_1 = \hat{\rho}_1
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \hat{\phi}_1 = \frac{\sum_{t=2}^{T}\left(X_t - \overline{X}\right)\left(X_{t-1} - \overline{X}\right)}{\sum_{t=1}^{T}\left(X_t - \overline{X}\right)^2}$$

Ocene AR(1) modela metodom momenata (III)

- Potrebno je još da ocenimo i varijansu slučajne greške modela δ²:

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{var}(X_t) = \dfrac{\sigma^2}{\left(1-\phi_1^2\right)} \\[2ex] s^2 = \widehat{\operatorname{var}}(X_t) = \dfrac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(X_t - \overline{X}\right)^2 \\[2ex] \operatorname{var}(X_t) = s^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{\sigma}^2 = s^2\left(1-\hat{\phi}_1^2\right)$$

Ocene AR(2) modela metodom momenata

- Model oblika:

$$(X_t - \mu) = \phi_1(X_{t-1} - \mu) + \phi_2(X_{t-2} - \mu) + \ldots + \phi_p(X_{t-p} - \mu) + e_t$$

sa nepoznatim parametrima $\mu, \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p$ i σ^2.

- Ocene autoregresionih parametara dobijaju se iz veze:

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2}$$

Ocene AR(2) modela metodom momenata (II)

- Preciznije, parametre Φ_1 i Φ_2 dobijamo iz relacija:

$$\left.\begin{array}{l}
k=1,\ \rho_1=\phi_1+\phi_2\rho_1 \\
k=2,\ \rho_2=\phi_1\rho_1+\phi_2 \\
\hat{\rho}_1=r_1=\dfrac{\sum\limits_{t=2}^{T}\left(X_t-\overline{X}\right)\left(X_{t-1}-\overline{X}\right)}{\sum\limits_{t=1}^{T}\left(X_t-\overline{X}\right)^2} \\
\hat{\rho}_2=r_2=\dfrac{\sum\limits_{t=3}^{T}\left(X_t-\overline{X}\right)\left(X_{t-2}-\overline{X}\right)}{\sum\limits_{t=1}^{T}\left(X_t-\overline{X}\right)^2} \\
\rho_1=\hat{\rho}_1,\ \rho_2=\hat{\rho}_2
\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}
r_1=\hat{\phi}_1+\hat{\phi}_2 r_1 \\
r_2=\hat{\phi}_1 r_1+\hat{\phi}_2
\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{bmatrix}\hat{\phi}_1\\ \hat{\phi}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & r_1\\ r_1 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}r_1\\ r_2\end{bmatrix}$$

Ocene AR(2) modela metodom momenata (III)

- Ocena varijanse AR(2) modela je:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{var}(X_t)=\dfrac{\sigma^2}{(1-\phi_1 r_1-\phi_2 r_2)} \\[2ex] s^2=\widehat{\mathrm{var}}(X_t)=\dfrac{1}{T}\sum\limits_{t=1}^{T}\left(X_t-\overline{X}\right)^2 \\[2ex] \mathrm{var}(X_t)=s^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{\sigma}^2=s^2\left(1-\hat{\phi}_1 r_1-\hat{\phi}_2 r_2\right).$$

Ocene AR(p) modela metodom momenata

- Model oblika:

$$(X_t - \mu) = \phi_1(X_{t-1} - \mu) + \phi_2(X_{t-2} - \mu) + \dots + \phi_p(X_{t-p} - \mu) + e_t$$

sa nepoznatim parametrima $\mu, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ i σ^2.

- Ocene autoregresionih parametara dobijaju se iz Yule-Walker-ovog sistema jednačina:

$$\begin{bmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \\ \vdots \\ \hat{\phi}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & r_1 & \dots & r_{p-1} \\ r_1 & 1 & \dots & r_{p-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{p-1} & r_{p-2} & \dots & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_p \end{bmatrix}$$

Ocene AR(p) modela metodom momenata (II)

- Pri tome, ocene autokorelacionih koeficijenata se računaju kao:

$$\hat{\rho}_k = r_k = \frac{\sum_{t=k+1}^{T}\left(x_t - \overline{x}\right)\left(x_{t-k} - \overline{x}\right)}{\sum_{t=1}^{T}\left(x_t - \overline{x}\right)^2}, k = 1,2,\ldots,T-2$$

- Ocene varijanse je:

$$\hat{\sigma}^2 = s^2\left(1 - \hat{\phi}_1 r_1 - \hat{\phi}_2 r_2 - \ldots - \hat{\phi}_p r_p\right)$$

- Primenom ove metode dobijaju se **jednoznačne ocene** parametara AR(p) modela, što nije slučaj sa klasom MA i ARMA modela.

Ocene MA(1) modela metodom momenata

- Model oblika:

$$X_t = \mu + e_t - \theta_1 e_{t-1},$$

sa nepoznatim parametrima $\mu, \theta_1 \text{ i } \sigma^2$.

- Uspostavljamo sledeći niz jednakosti:

$$\left.\begin{aligned} &\rho_1 = -\frac{\theta_1}{1+\theta_1^2} \\ &\hat{\rho}_1 = r_1 = \frac{\sum_{t=2}^{T}(X_t - \overline{X})(X_{t-1} - \overline{X})}{\sum_{t=1}^{T}(X_t - \overline{X})^2} \\ &\rho_1 = r_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} &r_1 = -\frac{\hat{\theta}_1}{1+\hat{\theta}_1^2} \\ &r_1\hat{\theta}_1^2 + \hat{\theta}_1 + r_1 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \hat{\theta}_1(I/II) = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4r_1^2}}{2r_1}$$

- Time dolazimo do ocene koja je iz skupa realnih brojeva ako je ocena r_1, po modulu strogo manja od 0.5.

Ocene MA(1) modela metodom momenata (II)

- Parametri μ i δ_2 se dobijaju na već objašnjen način.
- Pri tome, ocena varijanse slučajne greške u MA(1) modelu je:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\mathrm{var}(X_t) = \sigma^2\left(1+\theta_1^2\right) \\
&s^2 = \widehat{\mathrm{var}}(X_t) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(X_t - \overline{X}\right)^2 \\
&\mathrm{var}(X_t) = s^2
\end{aligned}
\right\} \Rightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{s^2}{\left(1+\hat{\theta}_1^2\right)}.
$$

Ocene MA(q) modela metodom momenata

- Primena ovog metoda kod opšteg MA(q) modela je komplikovana.
- U odgovarajućem sistemu od q jednačina q nepoznatih parametara se javljaju na nelinearan način.
- Kao i kod MA(1) modela moguće je da dobijene ocene ne ispunjavaju uslov intvertibilnosti.
- Dakle, primena metoda momenata nije pogodna za ocenjivanje parametara MA modela.

Ocene ARMA(1,1) modela metodom momenata

- U modelu:

$$(X_t - \mu) = \phi_1 (X_{t-1} - \mu) + e_t - \theta_1 e_{t-1}$$

potrebno je oceniti parametre: $\mu, \phi_1, \theta_1 \text{ i } \sigma^2.$

- Kako je autokorelaciona funkcija ovog modela:

$$\rho_k = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ \dfrac{(\phi_1 - \theta_1)(1 - \phi_1 \theta_1)}{1 - 2\phi_1 \theta_1 + \theta_1^2} & k = 1 \\ \phi_1 \rho_{k-1} & k > 1. \end{cases}$$

Ocene ARMA(1,1) modela metodom momenata (II)

- Kako je $\rho_2 = \phi_1\rho_1$ odakle može da se oceni parametar Φ_1:

$$\left.\begin{array}{l}
\rho_2 = \phi_1\rho_1 \\
\hat{\rho}_1 = r_1 = \dfrac{\sum_{t=2}^{T}\left(X_t - \overline{X}\right)\left(X_{t-1} - \overline{X}\right)}{\sum_{t=1}^{T}\left(X_t - \overline{X}\right)^2} \\
\hat{\rho}_2 = r_2 = \dfrac{\sum_{t=3}^{T}\left(X_t - \overline{X}\right)\left(X_{t-2} - \overline{X}\right)}{\sum_{t=1}^{T}\left(X_t - \overline{X}\right)^2} \\
\rho_1 = \hat{\rho}_1, \rho_2 = \hat{\rho}_2
\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{\phi}_1 = \frac{r_2}{r_1}.$$

Ocene ARMA(1,1) modela metodom momenata (III)

- Do ocene θ_1 dolazimo na osnovu rešenja jednačine:

$$r1 = \frac{\left(\hat{\phi}_1 - \theta_1\right)\left(1 - \hat{\phi}_1\theta_1\right)}{1 - 2\hat{\phi}_1\theta_1 + \theta_1^2}$$

- Kako je u pitanju kvadratna jednačina, biramo ocenu po modulu strogo manju od 1.

- Varijansu računamo kao:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{var}(X_t) = \dfrac{\left(1 - 2\phi_1\theta_1 + \theta_1^2\right)}{\left(1 - \phi_1^2\right)}\sigma^2 \\ s^2 = \widehat{\mathrm{var}}(X_t) = \dfrac{1}{T}\sum\limits_{t=1}^{T}\left(X_t - \overline{X}\right)^2 \\ \mathrm{var}(X_t) = s^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{\sigma}^2 = \frac{\left(1 - \hat{\phi}_1^2\right)}{\left(1 - 2\hat{\phi}_1\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_1^2\right)}s^2.$$

Ocene ARMA(p,q) modela metodom momenata

- Primena metoda momenata može dati vrednosti koje nisu u skladu sa uslovom invertibilnosti MA komponente.

- Upotreba ovog metoda nije sasvim adekvatna u oceni ARMA (p,q) modela.