KOINTEGRACIJA (engl. Co-integration)

- OSNOVNI METODOLOŠKI OKVIR ZA MODELIRANJE MAKROEKONOMSKIH I FINANSIJSKIH VREMENSKIH SERIJA
- REZULTAT VREDAN NOBELOVE NAGRADE KOJA JE DODELJENA GREJNDŽERU (engl. Granger) 2003.g.

CLIVE GRANGER

- BRITANSKI NAUČNIK
- 1934 – 2009.
- DIPLOMIRAO JE MATEMATIKU I DOKTORIRAO STATISTIKU U V. BRITANIJI
- VEĆI DEO RADNOG VEKA PROVEO JE U SAD
- OSNOVNI REZULTATI (SAMO NEKI):
  - KOINTEGRACIJA
  - UZROČNOST U SMISLU GREJNDŽERA (engl. GRANGER-CAUSALITY)
  - V.SERIJE SA DUGOM MEMORIJOM – ARFIMA MODELI

Rezime:
Šta treba znati o kointegraciji?

- Regresiona analiza vremenskih serija sa j. korenom
- Opisna definicija i osnovna svojstva
- Formalna definicija
- Grejndžer-Johansenova teorema reprezentacije
- Model sa korekcijom ravnotežne greške
- Dvostepena procedura Englea i Grejndžera
  - Test kointegracije
  - Ocena parametara modela sa korek.ravnotežne greške i interpretacija parametara
- Modifikacije polazne ideje
- Ekonomski primeri

Ocenjivanje zavisnosti između nestacionarnih vremenskih serija

- Yule (1926), Granger and Newbold (1974), Hendry (1980), Phillips (1986).
- Direktno ocenjivanje daje lažnu sliku o visokoj korelisanosti - besmislene regresije.
- Ocene dobijene metodom ONK su pristrasne i nekonzistentne.
- Ocene dobijene metodom ONK nisu normalno raspodeljene.

Kako prevazići problem?

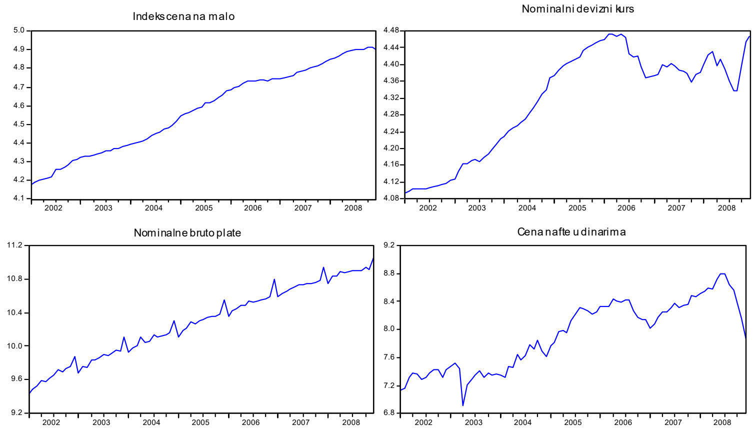
- Transformišemo veličine u stacionarne i ocenjujemo zavisnosti prvih diferenci.
- Problem: gde su nam ocene dugoročnih ravnotežnih veza?
- Dugoročne ravnotežne veze odražavaju sistemske odnose u ekonomiji. Njihova analiza je bitna.

Rešenje problema: kointegracija Pionirski rad: Engle and Granger (1987)

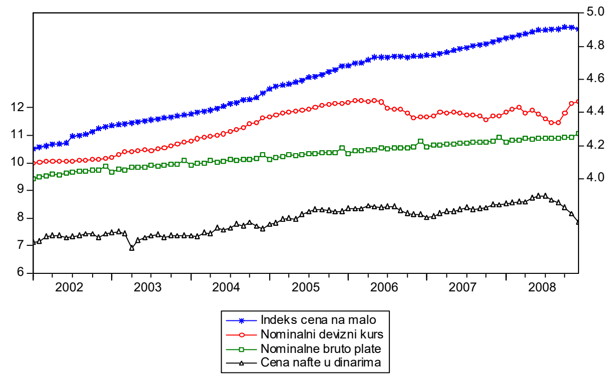
(prva verzija rada: Granger, 1983)

- Kointegracija podrazumeva stacionarnost linearne kombinacije individualno nestacionarnih vremenskih serija.
- Kointegrisanost proizilazi iz ekonomskih odnosa
  - dugoročna ravnotežna veza
  - skup egzogenih i endogenih promenljivih
  - racionalno predviđanje budućih diskontovanih vrednosti

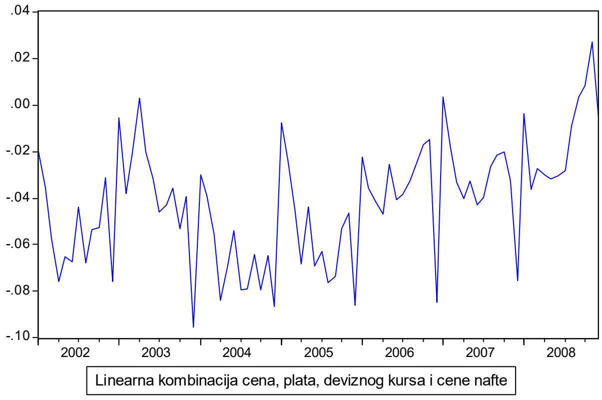
Cene, plate i devizni kurs privrede Srbije i cena nafte na svetskom tržištu – log vrednosti (2002:1 – 2008:12)



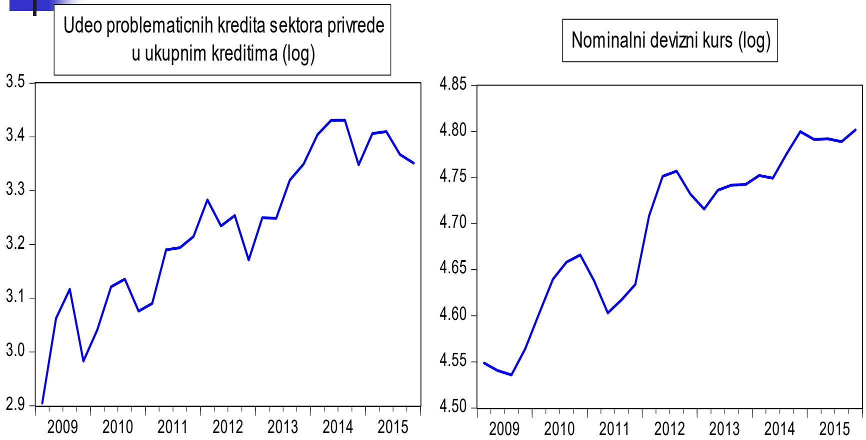
Cene, plate i devizni kurs privrede Srbije i cena nafte na svetskom tržištu – log vrednosti (2002:1 – 2008:12) II



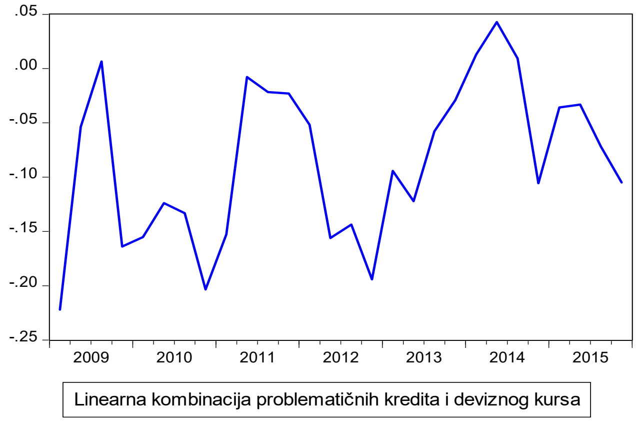
Cene, plate i devizni kurs privrede Srbije i cena nafte na svetskom tržištu – log vrednosti (2002:1 – 2008:12) III



Modeliranje problematičnih kredita sektora privrede u Srbiji (2009Q1 – 2015Q4)



Modeliranje problematičnih kredita sektora privrede u Srbiji (2009Q1 – 2015Q4) II



Alternativna interpretacija kointegracije

- Klasična linearna regresija stacionarnih vremenskih serija

$$Y_t = \beta_0 + \beta X_t + e_t, e_t - beli\ šum$$

- U slučaju da su vremenske serije nestacionarne

$$Y_t = \beta_0 + \beta X_t + v_t, v_t - stacionarno$$

Osnovna svojstva

1. Linearna kombinacija I(1) i I(0) vremenske serije: uvek I(1).
2. Linearna kombinacija I(a) i I(b) vremenske serije, a>b: uvek I(a).
3. Zaključak: da bi **dve** nestacionarne vremenske serije bile kointegrisane, neophodno je da poseduju isti nivo integrisanosti.
4. Dve nestacionarne vremenske serije mogu obrazovati samo jednu stacionarnu linearnu kombinaciju.

Osnovna svojstva II

1. Da bi **više od dve** nestacionarne vremenske serije bile kointegrisane, **nije neophodno** da poseduju isti red integrisanosti.
2. Primer $$\underbrace{X_t \sim I(1), \underbrace{Y_t \sim I(2), Z_t \sim I(2)}_{1.\,I(1)}}_{2.\,I(0)}$$
3. Tri nestacionarne vremenske serije mogu formirati najviše dve nezavisne stacionarne linearne kombinacije.
4. U slučaju kointegrisanosti ***m*** nestacionarnih v. serija, broj nezavisnih kointegracionih relacija može biti ***1,2,...,*** **m-1**.

Uopštena formalna definicija kointegracije

m-dimenziona vektorska vremenska serija:

$$\mathbf{X}_t = [X_{1t}, X_{2t}, \dots, X_{mt}]'$$
$$X_{1t}, X_{2t}, \dots, X_{mt} \sim I(d)$$

Kointegrisanost:

•Postoji matrica parametara $\boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}$, mxr, $r<m$, takva da su nezavisne linearne kombinacije $\boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}_t$ nižeg nivoa integrisanosti od d, $\boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}_t \sim I(d-c)$, $d \geq c > 0$.

• r je broj kointegracionih relacija (vektora) $\boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}_t$

Formalna definicija kointegracije II

Ako je matrica $\boldsymbol{\beta}$, mxr, data sa

$$\begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1r} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{m1} & \beta_{m2} & \dots & \beta_{mr} \end{bmatrix}$$

tada postoji r stacionarnih linearnih kombinacija $\boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}_t$:

$$\begin{array}{lllll} \textbf{I relacija:} & \beta_{11}X_{1t} + & \beta_{21}X_{2t} & + \dots + & \beta_{m1}X_{mt} \\ \textbf{II relacija:} & \beta_{12}X_{1t} + & \beta_{22}X_{2t} & + \dots + & \beta_{m2}X_{mt} \\ & \dots & \dots & & \dots \\ \textbf{r}-\textbf{ta relacija:} & \beta_{1r}X_{1t} + & \beta_{2r}X_{2t} & + \dots + & \beta_{mr}X_{mt} \end{array}$$

Model sa korekcijom ravnotežne greške Equilibrium-error-correction model-ECM

Dugoročno Y_t je određeno relacijom

$$Y_t = \beta_0 + \beta X_t$$

Odstupanje od ravnotežnog nivoa u *t:*
(ravnotežna greška)

$$Y_t - \beta_0 - \beta X_t,$$

Odstupanje od ravnotežnog nivoa u *t-1:*

$$Y_{t-1} - \beta_0 - \beta X_{t-1},$$

utiče na dinamiku Y_t

$$\Delta Y_t = f(Y_{t-1} - \beta_0 - \beta X_{t-1})$$

Model sa korekcijom ravnotežne greške II

$$\Delta Y_t = \gamma_0 (Y_{t-1} - \beta_0 - \beta X_{t-1}) + \gamma_{11} \Delta Y_{t-1} + \ldots + \gamma_{1k} \Delta Y_{t-k}$$
$$+ \gamma_{21} \Delta X_{t-1} + \ldots + \gamma_{2k} \Delta X_{t-k} + sl.greska, \gamma_0 < 0.$$

$(Y_{t-1} - \beta_0 - \beta X_{t-1})$ – **mehanizam korekcije ka ravnoteži**

$\Delta Y_{t-1}, \ldots, \Delta Y_{t-k}, \Delta X_{t-1}, \ldots, \Delta X_{t-k}$ – **varijacije na kratak rok**

Grejndžer-Johansenova teorema reprezentacije – intuitivno objašnjenje

- Ako su vremenske serije kointegrisane, onda je ta informacija relevantna za njihovo kretanje.
- U svakom narednom koraku kretanje se koriguje prema putanji dugoročne ravnoteže veze, tako da vremenske serije ne odstupaju od putanje određene kointegracijom.

Formulacija Grejndžer-Johansenove teoreme reprezentacije (teorema se i formalno dokazuje)

- Postoji ekvivalentnost između kointegrisanih sistema i ECM.
  - Ako su vremenske serije kointegrisane, onda se one uvek mogu predstaviti u formi ECM.
  - Ako postoji validna forma ECM bar za jednu promenljivu iz skupa promenljivih koje poseduju j.koren, onda su one kointegrisane.
- Model sa korekcijom ravnotežne greške sadrži informaciju o nivou vremenskih serija, čak i ako su one nestacionarne.

Relevantna pitanja u empirijskoj analizi

- Kako ispitati da li su date nestacionarne vremenske serije kointegrisane?
- Kako oceniti parametre kointegracione veze?
- Kako oceniti parametre modela sa korekcijom ravnotežne greške?

Dvostepena procedura Englea i Grejndžera

- Prvi korak: testiramo postojanje kointegracije i ocenjujemo kointegracionu vezu između $X_t \sim I(1)$, $Y_t \sim I(1)$.
- Drugi korak: na osnovu ocenjene kointegracije veze ocenjujemo parametre modela sa korekcijom ravnotežne greške.

Prvi korak

Metodom ONK ocenjujemo model:

$$Y_t = \beta_0 + \beta X_t + v_t, v_t \text{ ravnotežna greška}$$

i dobijamo ocene parametara: $\boldsymbol{b_0}$ i $\boldsymbol{b}$.

$$Y_t = \underbrace{b_0 + bX_t}_{ocenjeno} + \underbrace{r_t}_{neocenjeno}$$

$$r_t = Y_t - b_0 - bX_t$$

Razlika između stvarnih podataka i onih ocenjenim modelom su reziduali. **Reziduali su ocena ravnotežne greške**.

Testiranje kointegracije

- Testiramo da li su reziduali stacionarni ili ne:

$$H_o : r_t \sim I(1), \text{serije nisu kointegrisane}$$

$$H_1 : r_t \sim I(0), \text{serije su kointegrisane}$$

- Test kointegracije je tehnički gledano DF test jediničnog korena.
- Test se primenjuje na reziduale: DFR test.
- Asimptotska raspodela DFR testa zavisi od broja promenljivih i tipa determinističkih komponenti.
- Kritične vrednosti DFR testa se razlikuju od kritičnih vrednosti DF testa (videti Mladenović i Nojković, 2014) .

Ocene kointegracionih parametara

- Ukoliko se prihvati hipoteza o kointegrisanosti, onda su ONK ocene kointegracione.
- Svojstva ocena (Stock, 1987):
  - Nemaju normalnu raspodelu, tako da nije moguća primena standardnih metoda zaključivanja.
  - Superkonzistentne.
  - Pristrasne.
- <u>Nikada se ne navode standardne greške ocena parametara kointegracione relacije</u>!!!

Drugi korak: ocena ECM

- Primenom metoda ONK ocenjuje se model oblika:

$$\Delta Y_t = \gamma_0(\underbrace{Y_{t-1} - b_0 - bX_{t-1}}_{\textbf{ocena iz I koraka}}) + kratkorocna\ dinamika + sl.greška$$

$$\Delta Y_t = \gamma_0 r_{t-1} + kratkorocna\ dinamika + sl.greška$$

- Ocene parametara imaju poželjna statistička svojstva (ukoliko ne postoji greška specifikacije).
- Ocena γ_0 pokazuje stepen korekcije u kretanju zavisne promenljive ka putanji ravnotežne veze.

Primer dvostepene procedure

- Prvi korak: prema mesečnim (log) podacima privrede Srbije o cenama (p), platama (w), dev. kursu (ex) i ceni nafte na svetskom tržištu (poil) u periodu 2002:1-2008:12 ocenjena je linearna kombinacija:

  p=-0.52+0.35w+0.17ex+0.10poil

  za koju je testiranjem utvrđeno da je stacionarna.
- Drugi korak: ocenjen je model mesečne inflacije u formi ECM koji sugeriše da se cene u svom kretanju svakog meseca koriguju za oko 11% prema putanji ravnotežne veze.

Ocenjeni model inflacije u ECM formi

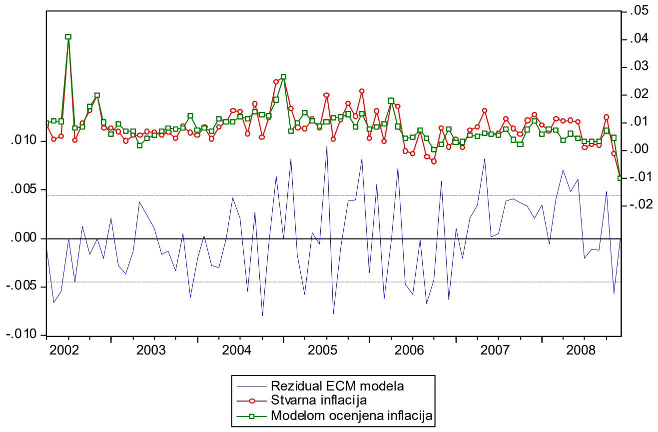
$$\Delta\hat{p}_t = const - 0.11(\underbrace{p_{t-1} - 0.35w_{t-1} - 0.17ex_{t-1} - 0.10poil_{t-1} + 0.52)}_{odstupanje\ od\ putanje\ ravnotezne\ relacije}$$
$$+ 0.03\Delta\, w_t + 0.10\Delta\, ex_t + 0.207\Delta\, p_{t-3}$$
$$+ vestacke\ promenljive$$

Standardne greske ocena su izostavljene zbog vece preglednosti

$R^2 = 0.65$, *nema greske specifikacije*

Napomena: ako se analiza nastavi sa novijim podacima onda kointegracija i dalje važi, ali uz izvesne modifikacije.

Ocenjeni model inflacije II



Ograničenja procedure

- Da li vremenske serije obrazuju samo jednu stacionarnu relaciju? (U opštem slučaju da, ako ih je dve).
- Koje vremenske serije iz datog skupa se prilagođavaju ravnotežnoj putanji?

Johansenova procedura Johansen (1995), Juselius (2006)

- Celovit okvir kointegracione analize
- Omogućava:
  - testiranje broja kointegracionih vektora
  - identifikaciju kointegracionih parametara
  - podelu na endogene i egzogene promenljive
  - identifikaciju izvora nestacionarnosti

Primer za veći broj kointegracionih relacija Modeliranje YU inflacije (1980 – 1991) i inflacije privrede Belorusije (1996 – 2001)

- Četiri osnovne promenljive (cene, kurs, novac i plate) formiraju dve stacionarne relacije.
  - Prva relacija:
    - Dugoročna veza cena, kursa i plata kojom se objašnjava dinamika inflacije i stope rasta plata (YU).
    - Dugoročna veza cena i kursa kojom se objašnjava dinamika inflacije (Belorusija).
  - Druga relacija (YU i Belorusija):
    - Dugoročna usklađenost novca i plata koja je značajna za kretanje novca. Novac se prilagođava platama, a ne cenama, što je specifičnost privreda u tranziciji sa kvazi-budžetskim deficitom.
  - Petrović and Vujošević-Mladenović (2000), *Journal of Development Economics*,
  - Mladenović and Bogetić (2006), *International Research Journal of Economics and Finance*.

Modifikacije polazne ideje kointegracije

- Nelinearna kointegracija
  - Stacionarnost oko nelinearne putanje
  - Nelinearno prilagođavanje stacionarnoj putanji.
- Kointegracija između vremenskih serija različitog tipa nestacionarnosti
  - I(2) i I(1) vremenske serije
  - I(1) i eksplozivne vremenske serije.

Stacionarnost oko nelinearne putanje (primer)

- U periodu 2001:7-2009:7 dobijen je rezultat o kointegraciji:

  $$p=-0.15+0.32w+0.24ex+0.11poil+0.01V*t$$

  V=1 za period 2008:7-2009:7 i V=0 za ostalo

- Cene, plate, devizni kurs i cena nafte su kointegrisane vremenske serije u Srbiji, ali oko dve različite funkcije determinističkog trenda čiji se parametri menjaju u julu 2008.
- Mladenović and Petrović (2014), Currency crash and exchange rate pass-through: A tale of two crises in Serbia, *Eastern European Economics*

Nelinearno prilagođavanje (primer)

$$\Delta Y_t = h(r_{t-1}) + \text{dinamika}, h(\cdot) \text{ nelinearna funkcija}$$

- Realni devizni kurs se prilagođava ravnotežnoj putanji sa fundamentima samo kada se dovoljno udalji od njih.
- Malo odstupanje: nema prilagođavanja.
- Odstupanje van određene granice: dolazi do prilagođavanja.

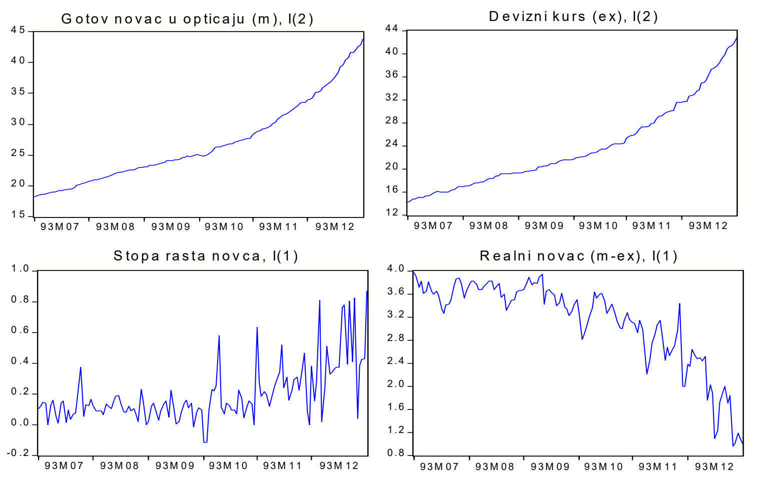
Polinomna kointegracija

- I(2) vremenske serije
  - Linearna kombinacija može biti I(1).
  - Ova kombinacija zajedno sa prvim diferencama, koje su takođe I(1), može obrazovati I(0) relaciju.
  - Linearna kombinacija može biti direktno stacionarna (retko se dešava).

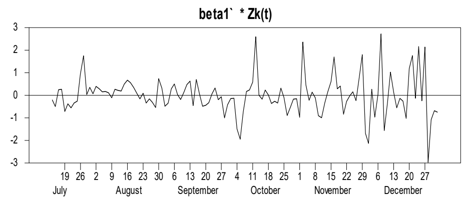
Polinomna kointegracija: primer

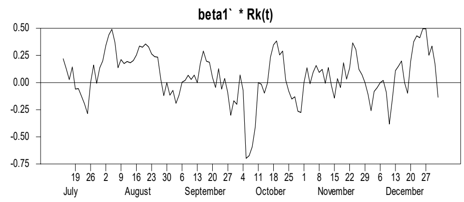
- U uslovima hiperinflacije nominalne veličine poseduju dva jedinična korena: logaritmi cena (p), deviznog kursa (ex) i novca (m) su I(2).
- Stope rasta (Δp, Δex i Δm) su I(1).
- Novac i devizni kurs mogu biti kointegrisani tako da je njihova kombinacija, realni novac, (m-ex), I(1).
- Konačno, moguće je da (m – ex) i Δex, odnosno (m – ex) i Δm, obrazuju stacionarnu linearnu kombinaciju.
  - Inverzna ocena kointegracionog parametra predstavlja ocenu stope deprecijacije, odnosno stope rasta novca, pri kojoj država maksimizira prihod od emisije novca (tzv. Cagan-ova funkcija tražnje za novcem).

Polinomna kointegracija
Dnevni podaci najekstremnijeg perioda hiperinflacije Srbije: jun – decembar 1993, Mladenović and Petrović (2010), *Journal of International Money and Finance*



Polinomna kointegracija: Kointegraciona jednačina realnog novca i stope rasta novca





- Stacionarna kombinacija (m-ex)+5.4Δm.
- Pri dnevnoj stopi rasta novca 1/5.4=19% maksimizira se inflacioni prihod.
- Stvarne dnevne stope rasta novca postaju veće od 19% tek u decem. 93.
- Hiperinflacija je trajala sve dok je to odgovaralo državi!

Rezime osnovnih koraka u makroekonometrijskom modeliranju

- Test jediničnog korena
  - Ako su serije stacionarne, tada se modeliranje ostvaruje prema principima KLRM.
  - Ako serije poseduju jedinični koren, tada se proverava postojanje kointegracije.
- Test kointegracije
  - Ako postoji kointegracija, onda se ocenjuje ECM i determiniše endogenost i egzogenost.
  - Ako kointegracija ne postoji, onda se
    - Ocenjuje model prvih diferenci.
    - Redefiniše skup promenljivih.

O ocenama parametara u kointegracionoj relaciji

- Na osnovu 5000 simulacija ocenjena je relacija

$$\widehat{Y}_t = b_0 + bX_t,$$

gde je:

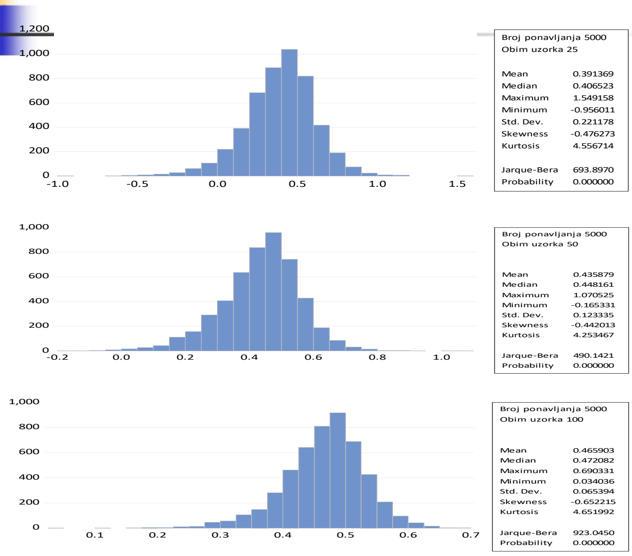
$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_{xt},$$

$$Y_t = 10 + 0.5X_{t-1} + \varepsilon_{yt},$$

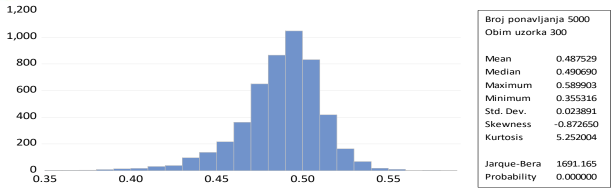
ε_{xt}, ε_{yt} - medjusobno nekorelisani procesi Gausovog belog šuma sa varijansama 1

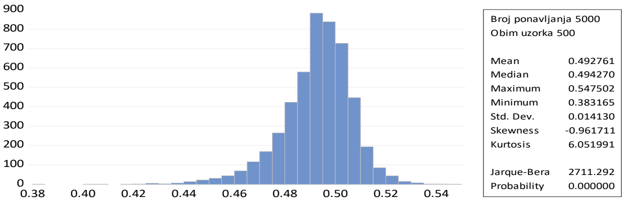
- Obimi uzorka: 25, 50, 100, 300, 500

Raspodela ocene nagiba u kointegracionoj jednačini



Raspodela ocene nagiba u kointegracionoj jednačini II





Komparativna analiza: ocene parametara u modelu sa stacionarnim vremenskim serijama

- Na osnovu 5000 simulacija ocenjena je relacija

$$\widehat{Y}_t = b_0 + bX_t,$$

gde je:

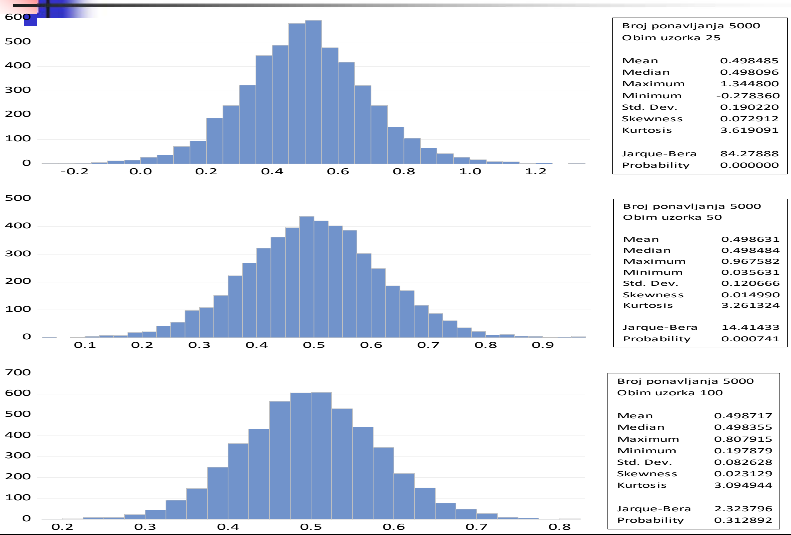
$$X_t = 0.6X_{t-1} + \varepsilon_{xt},$$

$$Y_t = 10 + 0.5X_{t-1} + \varepsilon_{yt},$$

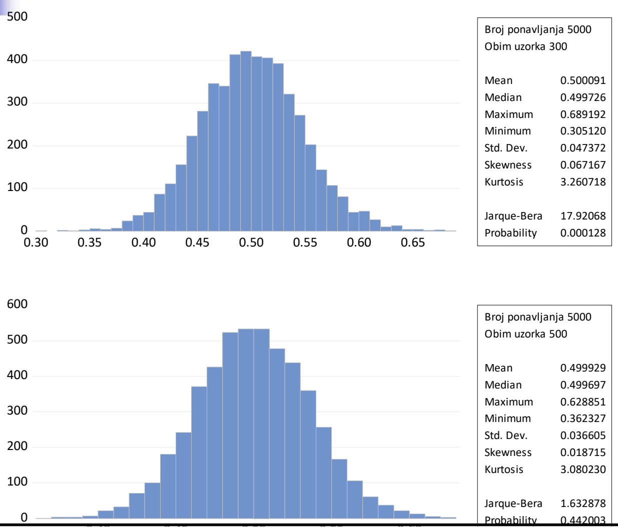
ε_{xt}, ε_{yt} - medjusobno nekorelisani procesi Gausovog belog šuma sa varijansama 1

- Obimi uzorka: 25, 50, 100, 300, 500

Raspodela ocene nagiba u modelu sa stacionarnim vremenskim serijama



Raspodela ocene nagiba u modelu sa stacionarnim vremenskim serijama II



Poređenje standardnih grešaka raspodela iz dva modela: analiza konzistentnosti ocene

Obim uzorka	**Kointegracioni model**		**Model sa stacionarnim vremenskim serijama**	
	Standardna greška	Procentualno smanjenje	Standardna greška	Procentualno smanjenje
25	0.221	-	0.190	-
50	0.123	44%	0.121	36%
100	0.065	47%	0.083	31%
300	0.024	63%	0.047	43%
500	0.014	42%	0.037	21%

- Procentualno smanjenje računato je u odnosu na prethodnu vrednost standardne greške.

Zadatak 1.

Pokazati da su vremenske serije definisane donjim sistemom jednačina kointegrisane.

$$X_{1t} = \sum_{i=1}^{t} e_{1i} + e_{2t},\ e_{1t},\ e_{2t} - \text{procesi beli šum}$$

$$X_{2t} = 0.5\sum_{i=1}^{t} e_{1i} + e_{2t}$$

48

Zadatak 2.

Vremenske serije X_{1t}, X_{2t} i X_{3t} definisane su na sledeći način:

$$X_{1t} = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{i} e_{1j} + \sum_{i=1}^{t} e_{2i} + e_{3t},$$

$$X_{2t} = \sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{i} e_{1j} - \sum_{i=1}^{t} e_{2i} + e_{3t}$$

$$X_{3t} = \sum_{i=1}^{t} e_{1i} + \sum_{i=1}^{t} e_{2i} + e_{3t}$$

e_{1t}, e_{2t}, e_{3t} – procesi beli šum

Pokazati da je:

$X_{1t} - X_{2t} \sim I(1)$,

$X_{1t} - X_{2t} - 2X_{3t} \sim I(1)$,

$X_{1t} - X_{2t} - 2X_{3t} + 2\Delta X_{1t} \sim I(0)$.

49

Zadatak 3.

Date su jednačine:

$\Delta X_{1t} = -0.5(X_{1t-1} - X_{2t-1}) + \varepsilon_{1t}$

$\Delta X_{2t} = 0.25(X_{1t-1} - X_{2t-1}) + \varepsilon_{2t}$

$\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}$ – sl.greške modela

1. Pokazati da je proces $Z_t = X_{1t} - X_{2t}$ stacionaran, dok su pojedinačno procesi X_{1t} i X_{2t} integrisani reda 1.
(Sugestija: iz sistema jednačina izvesti $Z_t = X_{1t} - X_{2t}$ i $Y_t = X_{1t} + 2X_{2t}$ i potom izraziti svaku od serija X_{1t} i X_{2t} kao linearnu kombinaciju Z_t i Y_t.)
2. Šta bi se desilo ako bi se 0.25 zamenilo sa -0.5?

50