

Analiza vremenskih serija:
osnove testa jediničnog korena

Zorica Mladenović

1

Test jediničnog korena
Dickey-Fuller-ov test jediničnog korena

- Osnovna ideja
- Različite determinističke komponente
- Izračunavanje test-statistike
- Pravilo odlučivanja
- Određivanje broja jediničnih korena
- Algoritam testiranja
- Prošireni test
- Nedostaci
- Dalja analiza

2

Dickey-Fuller-ov (DF) test jediničnog korena: uvod

- Polazni model:

$$X_t = \phi X_{t-1} + e_t$$

- Hipoteze:

H_0 : Serija poseduje jedinični koren, $\phi=1$, $X_t \sim I(1)$

H_1 : Serija je stacionarna (oko nule), $\phi < 1$, $X_t \sim I(0)$

- Alternativna specifikacija polaznog modela:

$$\Delta X_t = \phi X_{t-1} + e_t, \phi - 1 = \varphi$$

tako da hipoteze postaju:

H_0 : Serija poseduje jedinični koren, $\varphi=0$, $X_t \sim I(1)$

H_1 : Serija je stacionarna, $\varphi < 0$, $X_t \sim I(0)$

3

DF test za različite determinističke komponente

DF test	τ	τ_μ	τ_t
Determinističke komponente	Nema	Konstanta	Konstanta+ Linearni trend
$E(X_t)$	0	μ	$\mu + bt, t=1,2,\dots$

$b > 0$, konstantni prirast (uklon)

$$\Delta X_t = b + \text{greska}, X_t = b + X_{t-1} + \text{greska}$$

Parametar uz t u očekivanoj vrednosti vremenske serije odgovara "slobodnom članu" u modelu prve difference serije sa jediničnim korenom

4

DF test za različite determinističke komponente II

- Tri varijante Dickey Fuller-ovog testa (DF test): τ , τ_μ , τ_t
- Nulta (H_0) i alternativna (H_1) hipoteza:
 - i) τ

$H_0: X_t = X_{t-1} + e_t$, Serija je slučajan hod

$H_1: X_t = \phi X_{t-1} + e_t$, $\phi < 1$, Serija je stacionarna oko nule.
 - ii) τ_μ

$H_0: X_t = X_{t-1} + e_t$, Serija je slučajan hod

$H_1: X_t = \phi X_{t-1} + \text{konstanta} + e_t$, $\phi < 1$, Serija je stacionarna oko nenulte srednje vrednosti
 - iii) τ_t

$H_0: X_t = b + X_{t-1} + e_t$
Serija je slučajan hod sa konstantnim prirastom

$H_1: X_t = \phi X_{t-1} + \text{konstanta} + \text{trend} + e_t$, $\phi < 1$, Serija je trend-stacionarna

5

Kako se dolazi do vrednosti DF test statistika za različite determinističke komponente?

Varijante DF testa	Odgovarajući model
τ	$\Delta X_t = \phi X_{t-1} + e_t$
τ_μ	$\Delta X_t = \phi X_{t-1} + \beta_0 + e_t$
τ_t	$\Delta X_t = \phi X_{t-1} + \beta_0 + \beta t + e_t$

6

Računanje DF statistike

- Primenom metoda ONK ocenjen je model:

$$\Delta \hat{X}_t = \hat{\varphi} X_{t-1} + \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 t$$

$$s(\hat{\varphi})$$

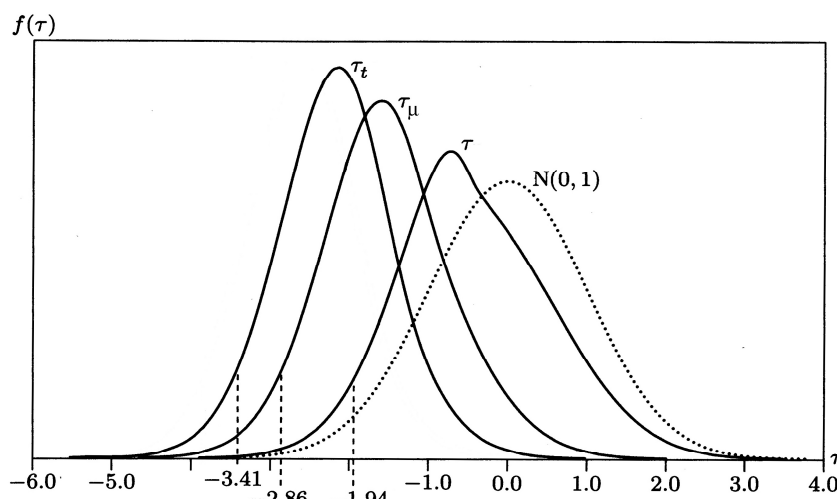
- **DF test-statistika je količnik ocene parametra φ i odgovarajuće standardne greške te ocene:**

$$DF = \tau_t = \frac{\hat{\varphi}}{s(\hat{\varphi})}$$

- DF test statistika ima formu standardnog t -odnosa.
- DF test statistika nema t -raspodelu u uslovima istinitosti nulte hipoteze.
- DF test statistika poseduje nestandardnu raspodelu, koju su odredili Dickey i Fuller.
- Kritične vrednosti: Fuller (1976) i MacKinnon (1991).

7

Funkcije gustine tri varijante DF test-statistika za uzorak velikog obima



Pravilo odlučivanja

T kritične vrednosti za 5%	τ	τ_{μ}	τ_t
∞	-1.94	-2.86	-3.41

- Nulta hipoteza o postojanju jediničnog korena se odbacuje za dovoljno malu vrednost statistike (kada je izračunata vrednost manja od kritične).
- Nulta hipoteza o postojanju jediničnog korena se prihvata za dovoljno veliku vrednost statistike (kada je izračunata vrednost veća od kritične).

9

Određivanje broja jediničnih korena I

- Ako je H_0 prihvaćeno kao tačno, onda se zaključuje da je serija integrisana prvog reda, $X_t \sim I(1)$.
- Međutim, potrebno je utvrditi da li je broj jediničnih korena tačno jedan ili eventualno dva.
- Nastavljamo testiranje:

$$H_0: X_t \sim I(2) \text{ protiv } H_1: X_t \sim I(1)$$

$$H_0: \Delta X_t \sim I(1) \text{ protiv } H_1: \Delta X_t \sim I(0).$$

- Sada je polazna serija u analizi ΔX_t .
- Relevantna specifikacija:

$$\Delta X_t = \phi \Delta X_{t-1} + \beta_0 + \beta t + e_t - \Delta X_{t-1}$$

$$\Delta \Delta X_t = \phi \Delta X_{t-1} + \beta_0 + \beta t + e_t, \phi - 1 = \varphi$$

$$\Delta^2 X_t = \phi \Delta X_{t-1} + \beta_0 + \beta t + e_t$$

- Ocenjujemo $\Delta^2 X_t$ u zavisnosti od ΔX_{t-1} , konstante i trenda. Proveravamo da li je t-odnos za ocenu uz ΔX_{t-1} veći ili manji od odgovarajuće kritične vrednosti DF testa.

10

Određivanje broja jediničnih korena II

- Ako je H_0 odbačeno, onda se zaključuje da je serija $X_t \sim I(1)$, odnosno da poseduje tačno jedan jedinični koren.
- Ako je H_0 prihvaćeno kao tačno, onda se zaključuje da je serija integrisana drugog reda, $X_t \sim I(2)$.
- Potrebno je utvrditi da li je broj jediničnih korena tačno dva ili eventualno tri.
- Nastavljamo testiranje:

$$H_0: X_t \sim I(3) \text{ protiv } H_1: X_t \sim I(2)$$

$$H_0: \Delta^2 X_t \sim I(1) \text{ protiv } H_1: \Delta^2 X_t \sim I(0).$$

- Sada je polazna serija u analizi $\Delta^2 X_t$.
- $$\Delta^2 X_t = \phi \Delta^2 X_{t-1} + \beta_0 + \beta t + e_t \quad /- \quad \Delta^2 X_{t-1}$$

$$\Delta \Delta^2 X_t = \phi \Delta^2 X_{t-1} + \beta_0 + \beta t + e_t, \quad \phi - 1 = \varphi$$

$$\Delta^3 X_t = \varphi \Delta^2 X_{t-1} + \beta_0 + \beta t + e_t.$$
- **Ocenjujemo $\Delta^3 X_t$ u zavisnosti od $\Delta^2 X_{t-1}$ konstante i trenda. Proveravamo da li je t-odnos za ocenu uz $\Delta^2 X_{t-1}$ veći ili manji od odgovarajuće kritične vrednosti DF testa.**
- DF manje od kritične vrednosti, $H_1: X_t \sim I(2)$ se prihvata.
- DF veće od kritične vrednosti, $H_0: X_t \sim I(3)$ se prihvata. Testiranje se nastavlja....

11

Algoritam testiranja I

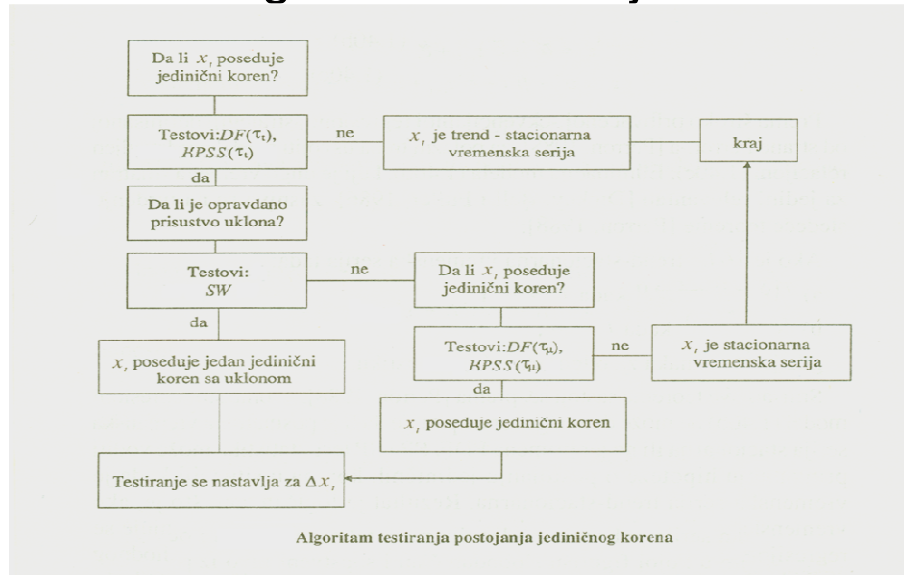
- I korak: Primenjuje se τ_t statistika
 - $\tau_t > \tau_t^k \Rightarrow$ Postoji bar jedan jedinični koren
 - $\tau_t < \tau_t^k \Rightarrow$ **Seriya je trend-stacionarna.**
- Ako je $\tau_t > \tau_t^k$ prelazimo na II korak:

Da li u seriji postoji konstantni prirast?

 - SW (Stok-Votsonov) test:
 - Da li je srednja vrednost ΔX_t različita od nule?
 - II.1. DA: **Seriya ima jedan jedinični koren sa prirastom.**
 - II.2. NE: Ponavljamo testiranje ali prema τ_μ
- III korak:
 - Iz II.1. Da li postoji i drugi jedinični koren?
 - Iz II.2. Da li serija ima jedan koren, ali bez konstantnog prirasta?

12

Algoritam testiranja II



Prošireni DF test Augmented DF test, ADF(K)

- $\Delta X_t = \beta_0 + \beta t + \varphi X_{t-1} + \delta_1 \Delta X_{t-1} + \delta_2 \Delta X_{t-2} + \dots + \delta_K \Delta X_{t-K} + e_t$
- ADF test je količnik ocene parametra φ i odgovarajuće standardne greške ocene.
- ADF i DF imaju istu graničnu raspodelu: koristimo iste kritične vrednosti
- Parametar **K** može se odrediti na više načina:
 - Metod od posebnog ka opštem
 - Metod od opšteg ka posebnom
 - Informacioni kriterijumi.

Informacioni kriterijum I

- Definicija u kontekstu izbora K :

$$IC(K) = \ln[s^2(K)] + g \frac{(K+3)}{T}$$

- g nenegativna rastuća funkcija (kaznena)
- $s^2(K)$ je ocena varijanse slučajne greške modela.
- **Cilj je da se izabere takvo K kojim se minimizira vrednost IC**

15

Vrste informacionih kriterijuma

Funkcija g	Kaznena komponenta	Naziv	Oznaka
2	$2(K+3)/T$	Akaike	AIC
$\ln T$	$(\ln T)(K+3)/T$	Schwarz	SC ili SIC
$2\ln \ln T$	$(2\ln \ln T)(K+3)/T$	Hannan-Quinn	HQC ili HQIC

16

Odnos između informacionih kriterijuma

$$T \geq 8, \ln T > 2 \Rightarrow SC > AIC$$

$$T \geq 16, 2 \ln \ln T > 2 \Rightarrow HQ > AIC$$

$$T \geq 16, SC > HQ > AIC$$

Napomena

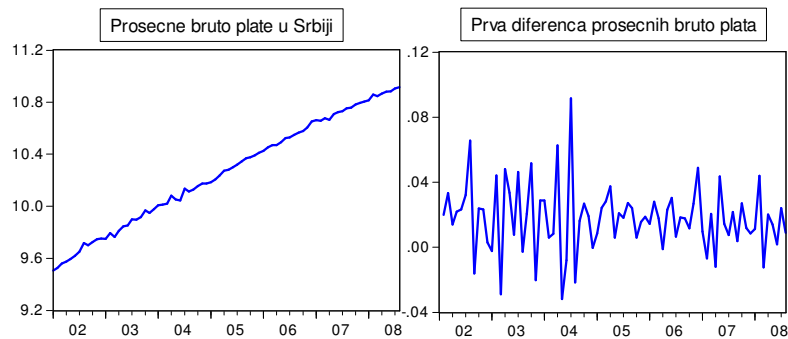
$$\ln 8 = 2.08$$

$$\ln 16 = 2.77$$

$$2 \ln \ln 16 = 2.04$$

17

Primer:
Prosečne bruto plate u Srbiji, 2002:1-2008:8
(desezonirani podaci, log vrednosti)



18

Primer: rezultati ADF testa

I faza: Primena testa iz modela sa konstantom i trendom	II faza: Opravdanost primene polazne varijante testa	III faza: Provera prisustva drugog j. korena
$H_0: X_t \sim I(1)$ $H_1: X_t \sim I(0)$ $ADF(2) = -1.79$, $\tau_1^k = -3.47$ $-1.79 > -3.47$	$H_0: E(\Delta X_t) = 0$, $H_1: E(\Delta X_t) \neq 0$ $SW = 12.6 > 1.96$	$H_0: \Delta X_t \sim I(1)$ $H_1: \Delta X_t \sim I(0)$ $ADF(1) = -12.23$ $-12.23 < -3.47$
H_0 se ne odbacuje.	H_0 se odbacuje.	H_0 se odbacuje.
Seriya ima bar jedan jedinični koren.	Seriya ima jedan jedinični koren sa konstantnim prirastom.	Prva diferencna serije je stacionarna.
	Nastavljamo sa upotrebom τ_1 statistike.	Polazna serija ima tačno jedan jedinični koren.

Osnovno ograničenje ADF testa

- Ako je serija stacionarna sa autoregresionim parametrom koji je blizak vrednosti 1, onda se primenom ADF testa u najvećem broju slučajeva dobija rezultat da postoji jedinični koren.
- Testom ne može da se diskriminiše da li je $\phi=1$ ili $\phi=0.95$, posebno na uzrocima malog obima.
- Ako je serija generisana kao

$$X_t = 0.95X_{t-1} + e_t$$
 onda bi testom morala da se odbaci nulta hipoteza o prisustvu jediničnog korena.
- Jedan od načina da se prevaziđe dati problem jeste da se nulta hipoteza definiše kao tvrđenje o stacionarnosti.

Nulta hipoteza o stacionarnosti

- Alternativna postavka hipoteza
 - H_0 : X_t je stacionarna vremenska serija
 - H_1 : X_t poseduje jedinični koren
- KPSS test
- (Kwiatkowski, Phillips, Schmidt and Shin, 1992).
- Paralelna upotreba ADF i KPSS testa povećava pouzdanost statističkog zaključivanja.

21

Ocena međuzavisnosti između v. serija sa jediničnim korenom

- Najveći broj ekonomskih vremenskih serija poseduje jedinični koren.
- Direktno ocenjivanje međuzavisnosti između v. serija sa jediničnim korenom primenom metoda ONK daje nepouzdan rezultate
 - Besmislena regresija.
 - Ocene dobijene metodom ONK su pristrasne i nekonzistentne.
 - Ocene dobijene metodom ONK nisu normalno raspodeljene.

22

Kako prevazići problem?

- Transformišemo vremenske serije u stacionarne i ocenjujemo zavisnosti prvih diferenci.
- Problem: gde su nam ocene dugoročnih ravnotežnih veza?
- Dugoročne ravnotežne veze odražavaju sistemske odnose u ekonomiji. Njihova analiza je bitna.

Rešenje problema: **kointegracija** (engl. co-integration)

- Rezultat vredan Nobelove nagrade za ekonomiju koja je dodeljena Granger-u 2003. godine.
- Prihvatljiva definicija: individualno *nestacionarne* vremenske serije su kointegrirane ako obrazuju *stacionarnu* linearnu kombinaciju.
- Kointegrisanost proizilazi iz ekonomskih odnosa
 - dugoročna ravnotežna veza
 - skup egzogenih i endogenih promenljivih
- Fundamentalni okvir modeliranja međuzavisnosti ekonomskih veličina

Rezime osnovnih koraka u makroekonometrijskom modeliranju

- Test jediničnog korena
 - Ako su serije stacionarne, tada se modeliranje ostvaruje prema principima klasičnog linearnog regresionog modela.
 - Ako serije poseduju jedinični koren, tada se proverava postojanje kointegracije.
- Test kointegracije
 - Ako postoji kointegracija, tada se ocenjuje posebna specifikacija i determiniše endogenost i egzogenost.
 - Ako kointegracija ne postoji, tada se
 - Ocenjuje model prvih diferenci.
 - Redefiniše skup promenljivih.