Analiza vremenskih serija: osnove nestacionarnosti

Zorica Mladenović

1

Modeliranje komponente trenda u vremenskoj seriji

- Dva tipa modela: trend-stacionarna i diferencno-stacionarna klasa modela
- Detaljnije o diferencno-stacionarnoj klasi modela
- Zašto je važno napraviti razliku između dve klase modela?
- ARIMA modeli

2

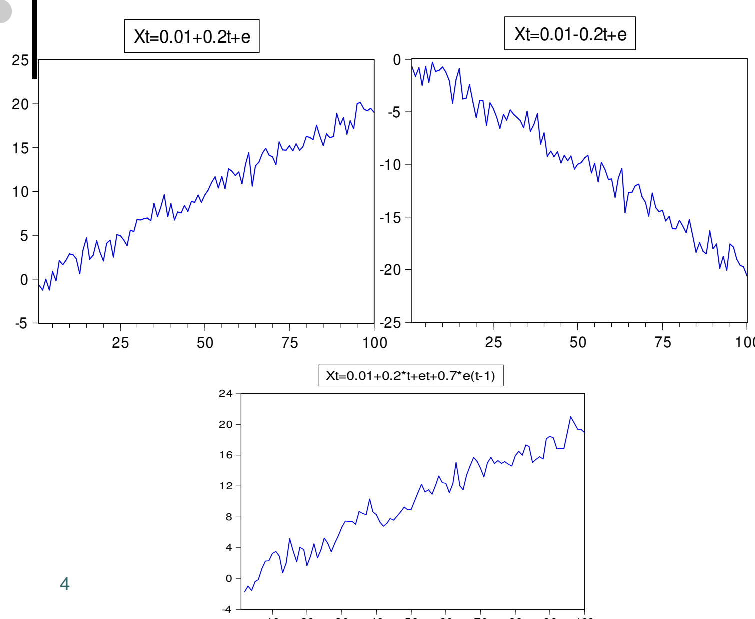
Trend-stacionarna klasa modela

- Vremenska serija je zbir trenda i stacionarne komponente.
- Koristi se za opisivanje v.serija koje su stacionarne, ali oko putanje najčešće linearnog trenda.
- Deterministički proces

$$X_t = b_0 + b_1 t + e_t, t = 1,2,\ldots$$
$$E(e_t) = 0, var(e_t) = \sigma^2, cov(e_t, e_{t-k}) = 0 \Rightarrow E(e_t e_{t-k}) = 0, k \neq 0.$$
$$E(X_t) = b_0 + b_1 t$$
$$var(X_t) = var(e_t) = \sigma^2, t = 1,2,\ldots$$
$$cov(X_t, X_{t-k}) = cov(e_t, e_{t-k}) = 0, t = 1,2,\ldots k = 1,2,\ldots$$

3

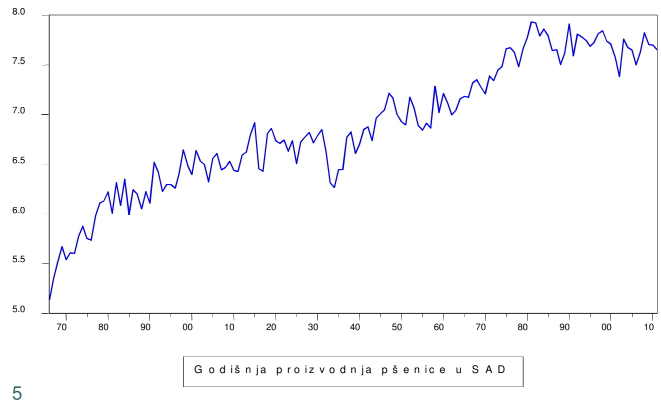
Trend-stacionarna klasa modela II



4

Trend-stacionarna klasa modela: primer iz praktične analize

- Period: 1866 – 2011. godina (146 godišnjih opservacija, log vrednosti)



5

Diferencno-stacionarna klasa modela

$X_t = b + X_{t-1} + e_t, \mathbf{E}(e_t) = 0, \mathbf{var}(e_t) = \sigma^2, \mathbf{E}(e_t e_{t-k}) = 0, \mathbf{k} \neq 0.$

$b > 0,$ **konstantni prirast**

$$X_t = b + \underbrace{X_{t-1}}_{b+X_{t-2}+e_{t-1}} + e_t$$

$$X_t = 2b + e_t + e_{t-1} + X_{t-2} = \ldots = bt + \underbrace{e_t + e_{t-1} + \ldots + e_1}_{\mathbf{t}} + X_0$$

$X_t = X_0 + bt + e_t + e_{t-1} + \ldots + e_1$

$t = 1, X_1 = X_0 + b + e_1,$

$t = 2, X_2 = X_0 + 2b + e_2 + e_1,$ **itd.**

Determinis ticka komponenta svakog narednog clana vremenske serije se uvecava za vrednost b

$\mathbf{E}(X_t) = X_0 + bt$

$\mathbf{var}(X_t) = \mathbf{var}(X_0 + bt + e_t + e_{t-1} + \ldots + e_1) = \mathbf{t}\sigma^2.$

Primenom operatora prve diference eliminise se nestaciona rnost :

$\Delta X_t = b + e_t, \mathbf{E}(\Delta X_t) = b, \mathbf{var}(\Delta X_t) = \mathbf{var}(e_t) = \sigma^2.$

6

Diferencno-stacionarna klasa modela II

- Vremenska serija nema stabilnu varijansu.
  - Varijansa je linearna funkcija vremena
  - Sa protokom vremena varijansa se neograničeno povećava.
- Može se pokazati da kovarijansa svaka dva člana zavisi od trenutka vremena i da se sa protokom vremena povećava.
- Model možemo shvatiti kao AR(1) model sa autoregresionim parametrom 1:
  - Obična autokorelaciona funkcija uzima niz nenultih vrednosti koje sporo opadaju počev od vrednosti bliske 1.
  - Parcijalna autokorelaciona funkcija poseduje nenultu vrednost samo na prvoj docnji i ta vrednost je bliska 1.

7

Diferencno-stacionarna klasa modela III

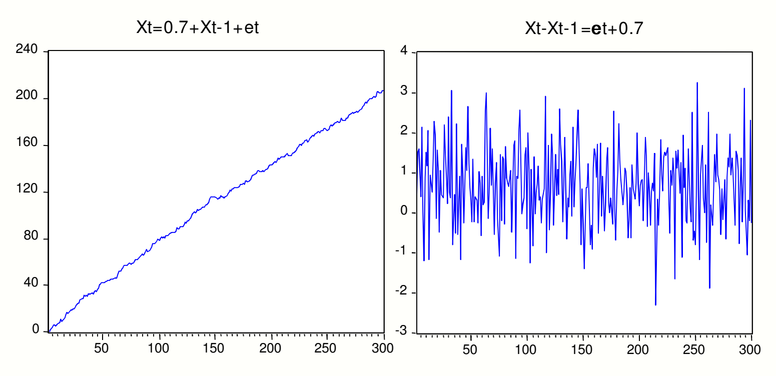
- Vremenska serija se transformiše u stacionarnu primenom operatora prve diference.
- Prva diferenca primenjena jednom: $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$
- Prva diferenca primenjena dva puta, druga diferenca:

$$\Delta^2 X_t = \Delta\Delta X_t = \Delta X_t - \Delta X_{t-1} = X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}$$

$$X_t = b + X_{t-1} + e_t \Rightarrow \underbrace{X_t - X_{t-1}}_{\Delta X_t} = b + e_t, \Delta X_t = b + e_t$$

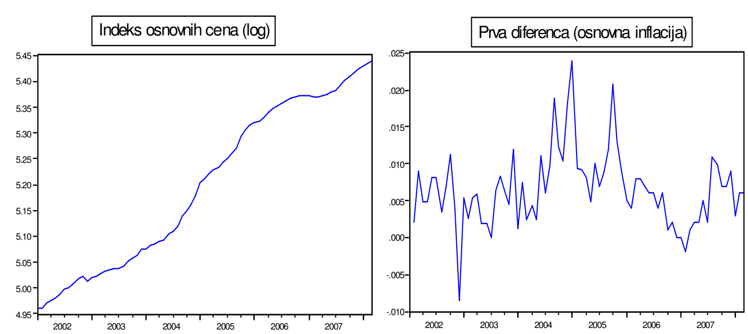
8

Diferencno-stacionarna klasa modela IV



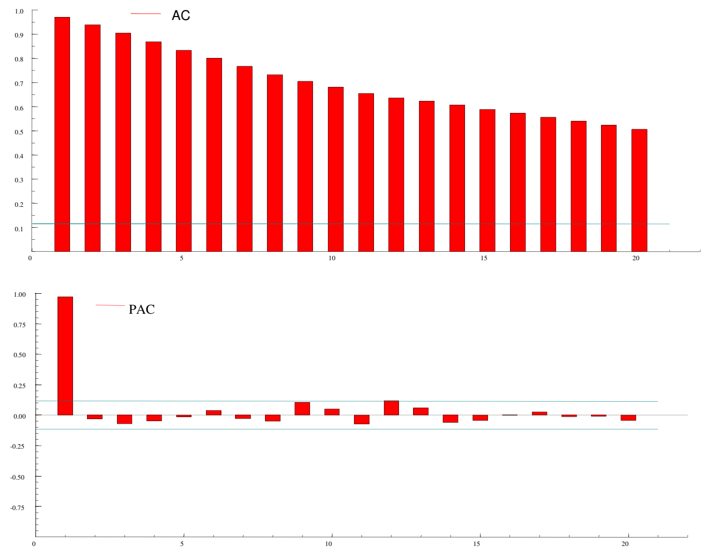
9

Diferencno-stacionarna klasa modela V: indeks osnovnih cena privrede Srbije (log vrednosti)



10

Diferencno-stacionarna klasa modela VI: obična i parcijalna autokorelaciona funkcija



11

Alternativni termini za diferencno-stacionarnu klasa modela

- Vremenska serija sa stohastičkim trendom
- Integrisano-stacionarna vremenska serija
- Vremenska serija sa jediničnim korenom
- Slučajan hod

12

Alternativni termini II

- Vremenska serija sa stohastičkim trendom
  - Na osnovu informacije o prethodnom kretanju vremenske serije ne možemo predvideti njeno kretanje u budućnosti. U suprotnom, kada bi trend bio deterministički, tada bi i prognoza bila pouzdana.

13

Alternativni termini III

- Integrisano-stacionarna vremenska serija
  - Vremenska serija dobija se na osnovu zbira članova procesa beli šum .
  - Operaciji sabiranja u diskretnom prostoru odgovara postupak integraljenja neprekidnih veličina.
  - Reč je o integrisanom procesu prvog reda, gde red 1 pokazuje koliko puta treba diferencirati seriju da bi se dobila njena stacionarna reprezentacija.
  - Ako je prva diferenca stacionarna, tada je vremenska serija integrisana reda 1. Oznaka: $X_t \sim I(1)$.
  - Za stacionarnu vremensku seriju kažemo da je integrisana reda 0: $X_t \sim I(0)$.

14

Alternativni termini IV

- Vremenska serija sa jediničnim korenom
  - Reč je o AR(1) modelu kod koga je autoregresioni parametar jednak vrednosti 1. Ponašanje ove v. serije na dugi rok određuje rešenje sledeće karakteristične jednačine:

$$X_t - 1 \cdot X_{t-1} = e_t$$
$$g - 1 = 0 \Rightarrow g = 1.$$

  - Koren korespondirajuće karakteristične jednačine uzima vrednost jedan. Otuda potiče naziv jedinični koren.
  - Broj jediničnih korena odgovara nivou integrisanosti vremenske serije, odnosno broju postupaka diferenciranja potrebnih za stacionarnu reprezentaciju vremenske serije.

15

Rezime uvedenih termina

Ako vremenska serija ima ***d*** jediničnih korena, onda je ona integrisana reda ***d***, i treba je diferencirati ***d*** puta da bi se obezbedila njena stacionarna reprezentacija.

$$\boxed{\begin{array}{l} Serija\, ima\, d\;\; jedinicnih\;\; korena \\ \Leftrightarrow X_t \sim I(d) \Leftrightarrow \Delta^d X_t \sim I(0) \end{array}}$$

16

Kako izgleda vremenska serija sa dva jedinična korena?

$$X_t = 2X_{t-1} - X_{t-2} + e_t$$

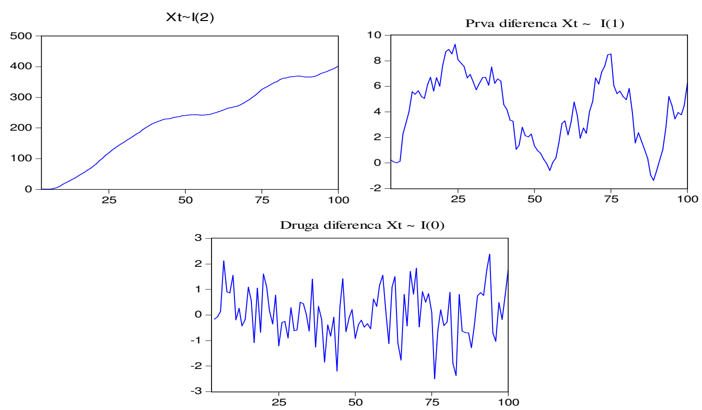
$$X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2} = e_t$$

$$g^2 - 2g + 1 = 0 \Leftrightarrow (g-1)^2 = 0 \Rightarrow g_1 = g_2 = 1 \Rightarrow X_t \sim I(2)$$

$$\underbrace{\underbrace{X_t - X_{t-1}}_{\Delta X_t} = \underbrace{X_{t-1} - X_{t-2}}_{\Delta X_{t-1}} + e_t}_{\Delta X_t \sim I(1)} \Rightarrow \underbrace{\underbrace{\underbrace{\Delta X_t = \Delta X_{t-1}}_{\Delta X_t - \Delta X_{t-1} = \Delta^2 X_t}}_{\Delta^2 X_t = e_t}}_{\Delta^2 X_t \sim I(0)} + e_t$$

17

Kako izgleda vremenska serija sa dva jedinična korena II?



18

Alternativni termini V

- Slučajan hod (engl. random walk):
  - Klasičan slučajan hod
  - Slučajan hod sa konstantnim prirastom

19

Klasičan slučajan hod

$$X_t = X_{t-1} + e_t, \mathbf{E(e}_t) = 0, \mathbf{var(e}_t) = \sigma^2, \ \mathbf{E}(e_t e_{t-k}) = 0, \mathbf{k} \neq 0.$$

$$X_t = \underbrace{X_{t-1}}_{X_{t-2}+e_{t-1}} + e_t$$

$$X_t = e_t + e_{t-1} + X_{t-2} = e_t + e_{t-1} + e_{t-2} + X_{t-3} = \ldots$$

$$X_t = \underbrace{e_t + e_{t-1} + e_{t-2} + \ldots + e_1}_{\mathbf{t}} + \underbrace{X_0}_{0}$$

$$X_t = e_t + e_{t-1} + e_{t-2} + \ldots + e_1$$

$$X_1 = e_1, var(X_1) = var(e_1) = \sigma^2$$

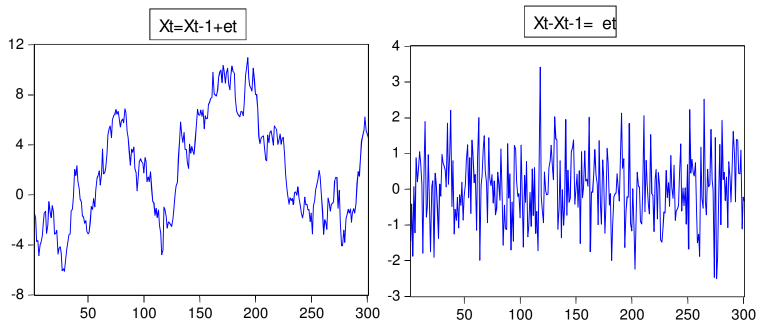
$$X_2 = e_2 + e_1, var(X_2) = var(e_2 + e_1) = 2\sigma^2$$

$$\ldots$$

$$\mathbf{var}(X_t) = \mathbf{var}(e_t + e_{t-1} + e_{t-2} + \ldots + e_1) = \underbrace{\sigma^2 + \sigma^2 + \ldots + \sigma^2}_{t} = t\sigma^2.$$

20

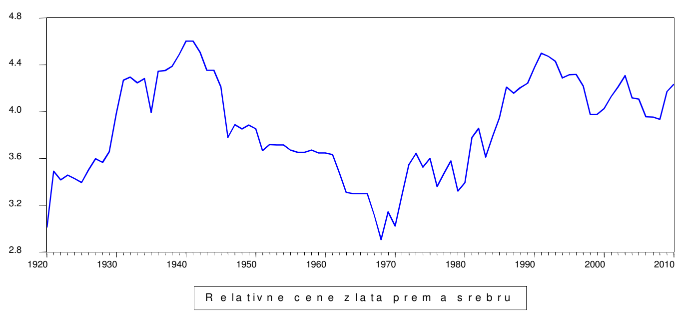
Klasičan slučajan hod: grafički prikaz



21

Klasičan slučajan hod: primer iz praktične analize

- Period: 1920–2010. godina (91 godišnjih opservacija, log vrednosti)



22

Slučajan hod u ekonomskim analizama: analiza efikasnosti finansijskog tržišta

- Koncept (slabe) efikasnosti finansijskog tržišta: prethodno kretanje stopa prinosa finansijskih instrumenata ne utiče na njihovo buduće kretanje.
- Na efikasnom finansijskom tržištu cene u svakom trenutku inkorporiraju sve faktore na strani ponude i potražnje, pa se menjaju samo sa pojavom nove vesti. To onemogućava sistematsku dobit onih učesnika na tržištu koji imaju monopolski položaj u posedovanju određenih informacija.
- Koncept efikasnog tržišta čini model slučajnog hoda relevantnim za opisivanje kretanja logaritma cena finansijskih instrumenata.

$$ln\, P_t = ln\, P_{t-1} + e_t \Rightarrow ln\, P_t - ln\, P_{t-1} = \Delta ln\, P_t = e_t$$

- Ukoliko logaritam cena prati putanju slučajnog hoda, tada je odgovarajuća stopa prinosa (prva diferenca logaritma datih cena) jednaka procesu beli šum. To znači da do promene cena dolazi slučajno, i to isključivo kao rezultat nove informacije. Tada možemo smatrati da je finansijsko tržište efikasno.

23

Slučajan hod u ekonomskim analizama: analiza deviznog tržišta

- Teorija o paritetu kupovne snage: skup datih dobara treba da košta približno isto u različitim ekonomijama, ako se izuzmu transportni i drugi troškovi.
- Slobodno rečeno, u uslovima fluktuirajućeg kursa, deprecijacija valute aproksimativno je jednaka razlici između domaće i inostrane inflacije. Valjanost ove teorije, uz sva ograničenja, može se predstaviti na sledeći način:

$$P_t = EX_t P_t^*, \underbrace{(ln\, EX_t - ln\, P_t) + ln\, P_t^*}_{ln(realni\ devizni\ kurs)} = 0$$

- Serija realni devizni kurs treba da oscilira relativno pravilno tokom vremena da bi teorija o paritetu kupovne snage bila validna.
- Ako serija realni devizni kurs ima karakteristike slučajnog hoda, onda se data teorija ne može prihvatiti.

24

Slučajan hod u ekonomskim analizama: analiza dostignutog stepena konvergencije

- **Teorija privrednog rasta**: nivoi BDP *per capita* u dve zemlje međusobno konvergiraju ako je njihova razlika stacionarna vremenska serija sa nultom srednjom vrednošću. U suprotnom, prisustvo j. korena sugeriše odsustvo tendencije ka konvergenciji.
- **Monetarna ekonomija**: za zemlje EMU (sa jedinstvenom valutom) konvergencija stopa inflacija značajna je kako bi jedinstvena monetarna politika ECB bila delotvorna u na različitim tržištima. Prisustvo jediničnog korena u razlici parova stopa inflacije sugeriše da efikasnost monetarne politike nije obezbeđena.

25

Slučajan hod u ekonomskim analizama: analiza nezaposlenosti

Blanšar i Samers (1986, 1987):

- Ukoliko fluktuacije privrednih ciklusa imaju trajan efekat na nivo nezaposlenosti, tada postoji tzv. histerezis efekat nezaposlenosti.
  - U tom slučaju visoke stope nezaposlenosti mogu se smanjiti tek nakon intervencija države.
  - Drugim rečima, aktivna politika države na tržištu radne snage opravdana je u slučaju validnosti efekta histerezisa.
- Efekat histerezisa nezaposlenosti postoji ukoliko data vremenska serija nezaposlenosti sadrži jedinični koren. Obratno, stacionarnost ove serije eliminiše pretpostavku o efektu histerezis.

26

Zašto je važno napraviti razliku između dve klase modela?

- Postoje dva osnovna razloga koji čine relevantnom podelu na stacionarne i nestacionarne veličine
  - Statistički
  - Ekonomski

27

Statistički razlozi

- Primena standardne statističke procedure nepouzdana je u regresionoj analizi vremenskih serija sa jediničnim korenom.
  - Ocene parametara regresionog modela dobijene primenom metoda ONK su pristrasne i nekonzistentne.
  - Ocene parametara regresionog modela dobijene primenom metoda ONK nemaju normalnu raspodelu. To znači da statističko zaključivanje zasnovano na t-odnosu i F-testu značajnosti koeficijenta determinacije nije tačno.
  - Moguća je pojava besmislene regresije. Ovim pojmom označava se regresija sa visokim vrednostima koeficijenta determinacije i t-odnosa (po modulu) između vremenskih serija sa jediničnim korenom, ali koje su potpuno nezavisne.

28

Ekonomski razlozi

- Razlika između vremenske serija sa i bez jediničnog korena ima jasnu ekonomsku implikaciju.
- Dok uticaj slučajnih šokova na nivo stacionarne vremenske serije slabi tokom vremena, efekat šoka na nivo vremenske serije sa jediničnim korenom ima trajno dejstvo za neodređeni period vremena.
- Ova razlika posebno dolazi do izražaja u teoriji poslovnih ciklusa: ako vremenska serija BDP sadrži jedinični koren, tada njeno odstupanje od dugoročnog trenda neće biti povremeno, kako naglašava tradicionalna teorija, već permanentno za neodređeni period vremena.
- Prisustvo jediničnog korena sugeriše da negativni šokovi iz faze recesije trajno redukuju nivo BDP, na koji se ekonomija ne može vratiti u fazi prosperiteta.

29

Opšta forma: Autoregresioni modeli pokretnih proseka za integrisane vremenske serije, ARIMA(p,d,q)

$$\Delta^d X_t = \phi_1 \Delta^d X_{t-1} + \phi_2 \Delta^d X_{t-2} + \dots + \phi_p \Delta^d X_{t-p}$$
$$+ e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2} - \theta_q e_{t-q}$$

- *p* red autoregresione komponente
- *d* nivo integrisanosti vremenske serije i
- *q* red komponente pokretnih proseka.

30

ARIMA(p,d,q) model: primeri

$$ARIMA(\,p{,}1{,}q\,):$$
$$\Delta X_t = \phi_1 \Delta X_{t-1} + \phi_2 \Delta X_{t-2} + \ldots + \phi_p \Delta X_{t-p} + e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2} - \theta_q e_{t-q}$$
$$ARIMA(\,p{,}2{,}q\,):$$
$$\Delta^2 X_t = \phi_1 \Delta^2 X_{t-1} + \phi_2 \Delta^2 X_{t-2} + \ldots + \phi_p \Delta^2 X_{t-p} + e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2} - \theta_q e_{t-q}$$

AR(p)	MA(q)	ARMA(p,q)	Beli šum	Slučajan hod
ARIMA(p,0,0)	ARIMA(0,0,q)	ARIMA(p,0,q)	ARIMA(0,0,0)	ARIMA(0,1,0)

31