Modeli stacionarnih vremenskih serija

Zorica Mladenović

1

Modeli stacionarnih vremenskih serija

- Linearni proces
- Osnovni modeli: postavka
- Obična i parcijalna autokorelaciona funkcija u osnovnim modelima
- Primeri

2

Linearni proces

- Fundamentalna teorema analize stacionarnih vremenskih serija: *Wold-ova teorema razlaganja*
- **Wold-ova teorema razlaganja**
  - Svaka slabo stacionarna vremenska serija može se predstaviti zbirom dva nekorelisana procesa
    - Prva komponenta: deterministička
    - Druga komponenta: stohastička
  - Stohastička komponenta naziva se **linearni proces** i predstavlja se kao:

$$X_t - \mu = e_t + \psi_1 e_{t-1} + \psi_2 e_{t-2} + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i e_{t-i}, \psi_0 = 0, E(X_t) = \mu.$$

$$X_t - \mu = \underbrace{\left(1 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \ldots\right)}_{\Psi(L)} e_t$$

3

Linearni proces II

- Svojstva:

$$1.\ var(X_t) = \gamma_0 = E(X_t - \mu)^2 = \sigma^2 \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2, E(e_t)^2 = \sigma^2.$$

$$2.\ \gamma_k = \sigma^2 \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \psi_{k+i}, k = 1,2,\ldots$$

$$3.\ \rho_k = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \psi_{k+i}}{\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2}, k = 1,2,..$$

$$4.\ Parametri \underbrace{\psi_1, \psi_2, \psi_{3,\ldots}}_{\psi\text{-ponderi}}\ odredjuju\ apsolutno\ konvergentan\ red: \sum_{i=0}^{\infty} |\psi_i| < \infty.$$

4

Osnovni modeli stacionarnih vremenskih serija

- Autoregresioni modeli (AR)
- Modeli pokretnih proseka (MA)
- Autoregresioni modeli pokretnih proseka (ARMA)
  - Sva tri tipa modela su specijalni slučajevi linearnog procesa

5

Opšte forme modela stacionarnih vremenskih serija

- AR(p) model

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + ... + \phi_p X_{t-p} + e_t$$

- MA(q) model

$$X_t = e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2} - ... - \theta_q e_{t-q}$$

- ARMA(p,q) model

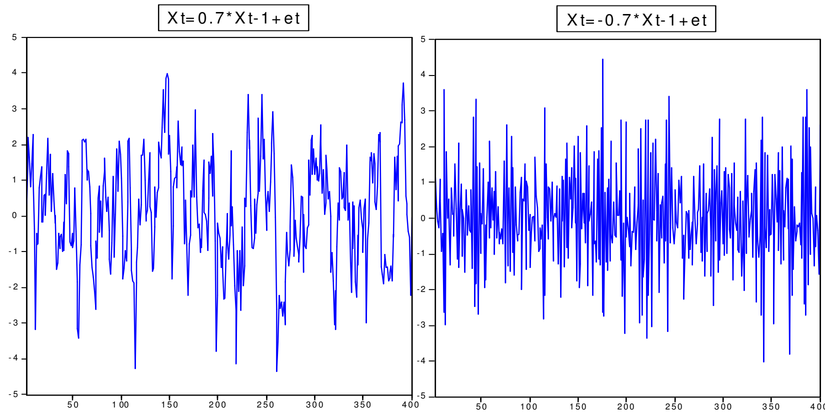
$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + ... + \phi_p X_{t-p} +$$
$$e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2} - ... - \theta_q e_{t-q}$$

- Parametri modela su:

$$\phi_1, \phi_2, ..., \phi_p, \theta_1, \theta_2, ..., \theta_q$$

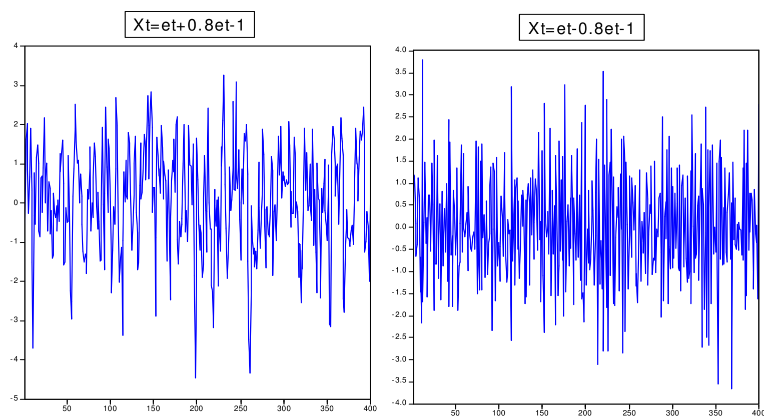
6

Primer AR(1) modela



7

Primer MA(1) modela



8

Uslov stacionarnosti I

- Relevantan kod AR modela i ARMA modela
- AR(p) model:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + ... + \phi_p X_{t-p} + e_t$$

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} - ... - \phi_p X_{t-p} = e_t$$

- AR modelu reda p može se pridružiti karakteristična jednačina oblika:

$$g^p - \phi_1 g^{p-1} - \phi_2 g^{p-2} - ... - \phi_p = 0$$

  - gde g_1, g_2,..., g_p označavaju rešenja (korene) karakteristične jednačine.
- Stacionarnost vremenske serije koja je opisana AR(p) modelom zavisi od rešenja karakteristične jednačine g_1, g_2,..., g_p.

9

Uslov stacionarnosti II

Može se pokazati da važi sledeća teorema:

- Ukoliko su svi koreni g_1, g_2,..., g_p po modulu strogo manji od jedan, onda je vremenska serija stacionarna.
- Ukoliko postoji bar jedan koren g_i, $i=1, 2,..., p$, koji je jednak vrednosti jedan po modulu, dok su drugi koreni strogo manji od jedan po modulu, onda je vremenska serija nestacionarna. Takva vremenska serija se uobičajeno naziva vremenska serija sa jediničnim korenom.
- Ukoliko postoji bar jedan koren g_i, $i=1,2,...,p$, koji je po modulu strogo veći od jedan, dok su drugi strogo manji od jedan, tada je vremenska serija eksplozivna. To znači da je vremenska serija pod uticajem kumulisanog dejstva trajno rastućeg efekta neočekivanih slučajnih šokova.

10

Uslov stacionarnosti kod AR(1) modela: autoregresioni parametar je po modulu strogo manji od jedan, $|\phi_1| < 1$

$$
\begin{aligned}
X_t &= \phi_1 X_{t-1} + e_t \\
&= \phi_1 [\phi_1 X_{t-2} + e_{t-1}] + e_t \\
&= \phi_1^2 [\phi_1 X_{t-3} + e_{t-2}] + e_t + \phi_1 e_{t-1} \\
&= \dots \\
&= e_t + \phi_1 e_{t-1} + \phi_1^2 e_{t-2} + \phi_1^3 e_{t-3} + \dots
\end{aligned}
$$

$$var(X_t) = var\left(e_t + \phi_1 e_{t-1} + \phi_1^2 e_{t-2} + \phi_1^3 e_{t-3} + \dots\right) = \sigma^2\left(1 + \phi_1^2 + \phi_1^4 + \phi_1^6 + \dots\right)$$

Da bi varijansa bila konacna, neophodno je da vazi $|\phi_1| < 1$. *Tada je:*

$$var(X_t) = \sigma^2 \underbrace{\left(1 + \phi_1^2 + \phi_1^4 + \phi_1^6 + \dots\right)}_{\frac{1}{1-\phi_1^2}} = \frac{\sigma^2}{1-\phi_1^2}.$$

11

Obična autokorelaciona funkcija jednostavnih AR i MA modela

Model	Uslov stacionarnosti	Obična autokorelaciona funkcija
Beli šum, MA(0)	Uvek stacionarna	$\rho_k=0$, $k=1,2,\dots$
AR(1), $0<\phi_1<1$ **$X_t=\phi_1 X_{t-1}+e_t$**	$\|\phi_1\| < 1$	$\rho_k=\phi_1^k$, $k=1,2,\dots$ Opada po eksponencijalnoj putanji
AR(1), $-1<\phi_1<0$ **$X_t=\phi_1 X_{t-1}+e_t$**		$\rho_k=\phi_1^k$, $k=1,2,\dots$ Opada po eksponencijalno oscilatornoj putanji (menja znak za svako k).
MA(1), $0<\theta_1<1$ **$X_t=e_t-\theta_1 e_{t-1}$**	Uvek stacionarna	$\rho_1= -\theta_1/(1+\theta_1^2) < 0$, $\rho_k=0$, $k=2,3,\dots$
MA(1), $-1<\theta_1<0$ **$X_t=e_t-\theta_1 e_{t-1}$**		$\rho_1= -\theta_1/(1+\theta_1^2) > 0$, $\rho_k=0$, $k=2,3,\dots$

12

Opšti oblik obične autokorelacione funkcije AR i MA modela

Model	Obična autokorelaciona funkcija
AR(p)	Opada tokom vremena po eksponencijalnoj, eksponencijalno oscilatornoj ili sinusoidnoj putanji.
MA(q)	$\rho_1 \neq 0$, $\rho_2 \neq 0$,..., $\rho_q \neq 0$, $\rho_k = 0$ za k>q. Jednaka je nuli za docnje veće od reda modela.

13

Parcijalna autokorelaciona funkcija jednostavnih AR i MA modela

Model	Dodatni opis	Parcijalna autokorelaciona funkcija
Beli šum, MA(0)	Nekorelisan proces	$\phi_{kk}=0$, $k=1,2,\ldots$
AR(1), $0<\phi_1<1$ **$X_t=\phi_1 X_{t-1}+e_t$**	Izmedju X_t i X_{t-1} nema dodatnog uticaja	$\phi_{11}=\rho_1=\phi_1$, $k=1$ $\phi_{kk}=0$, $k=2,3,\ldots$
AR(1), $-1<\phi_1<0$ **$X_t=\phi_1 X_{t-1}+e_t$**		$\phi_{11}=\rho_1=\phi_1$, $k=1$ $\phi_{kk}=0$, $k=2,3,\ldots$
MA(1), $0<\theta_1<1$ **$X_t=e_t-\theta_1 e_{t-1}$**	Poseduje AR reprezentaciju beskonačnog reda.	Opada tokom vremena po eksponencijalnoj putanji.
MA(1), $-1<\theta_1<0$ **$X_t=e_t-\theta_1 e_{t-1}$**		Opada tokom vremena po eksponencijalno oscilatornoj putanji.

14

Opšti oblik obične i parcijalne autokorelacione funkcije AR i MA modela

Model	Obična autokorelaciona funkcija	Parcijalna autokorelaciona funkcija
AR(p)	Opada tokom vremena po eksponencijalnoj, eksponen. oscilatornoj ili sinusoidnoj putanji	$\phi_{11}\neq 0$, $\phi_{22}\neq 0$,..., $\phi_{pp}\neq 0$, $\phi_{kk}=0$ za $k>p$. Jednaka je nuli za docnje veće od reda modela
MA(q)	$\rho_1\neq 0$, $\rho_2\neq 0$,..., $\rho_q\neq 0$, $\rho_k=0$ za $k>q$. Jednaka je nuli za docnje veće od reda modela	Opada tokom vremena po eksponencijalnoj, eksponen. oscilatornoj ili sinusoidnoj putanji

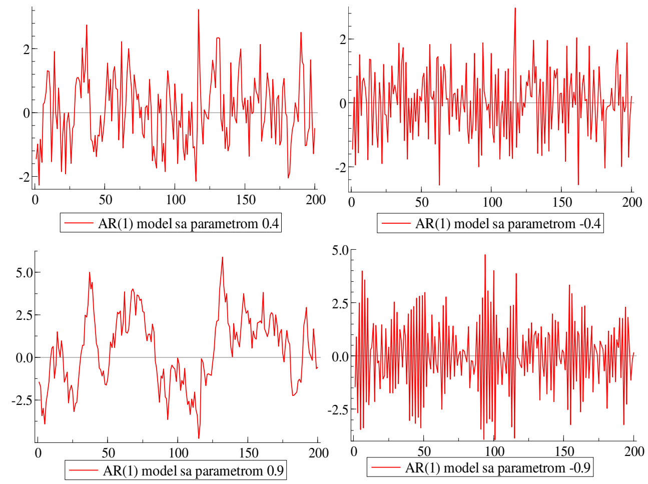
15

Primeri:

1. Ocene autokorelacionih koeficijenata kod AR(1) i MA(1) modela
2. Izbor adekvatnog modela za osnovnu inflaciju u Srbiji.

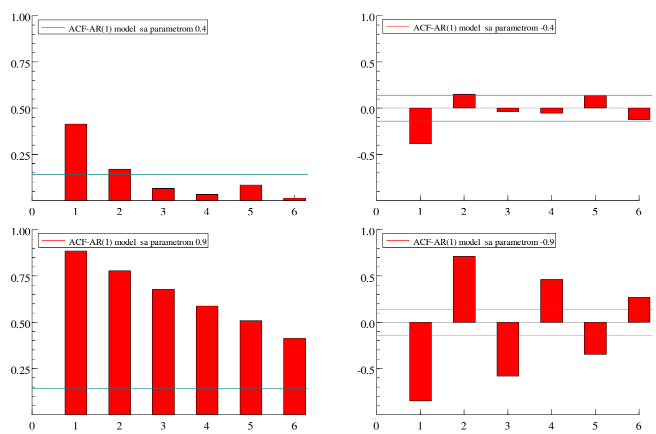
16

Primer 1: AR(1) modeli



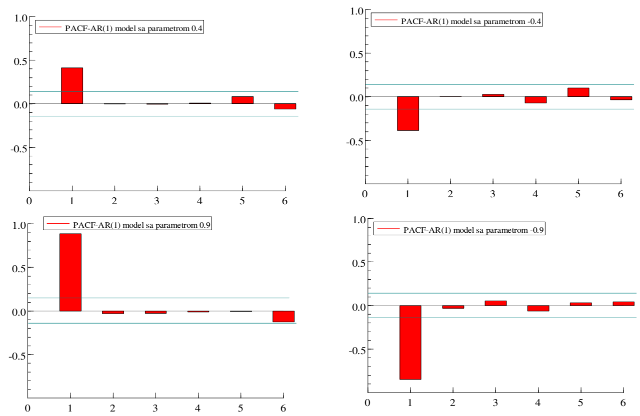
17

Primer 1: obična autokorelaciona funkcija kod četiri AR(1) modela



18

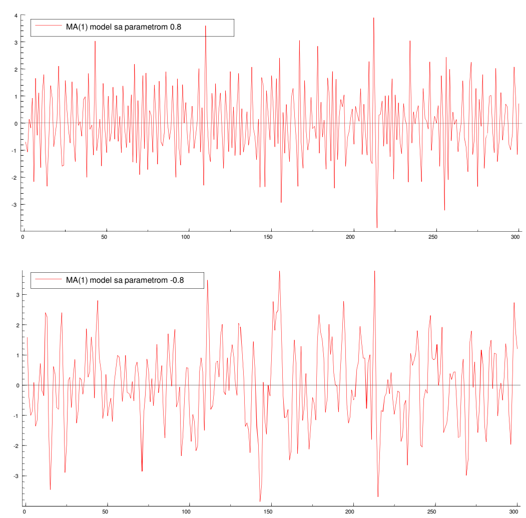
Primer 1: parcijalna autokorelaciona funkcija kod četiri AR(1) modela



19

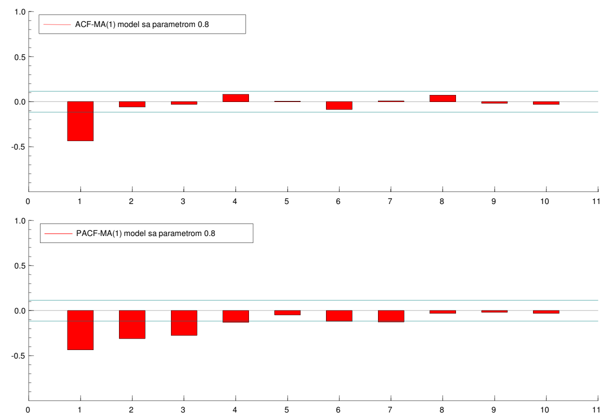
Primer 1: MA(1) modeli

$X_t = e_t - 0.8e_{t-1}$, $X_t = e_t + 0.8e_{t-1}$



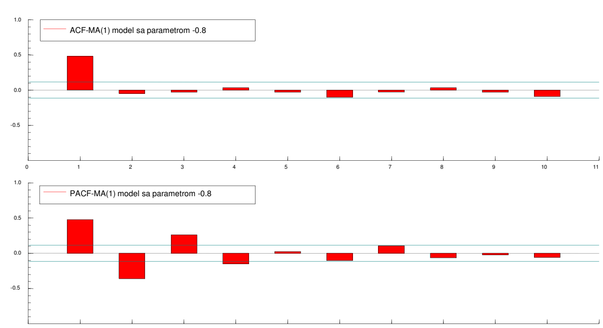
20

Primer 1: obična i parcijalna autokorelaciona funkcija MA(1) modela $X_t = e_t - 0.8e_{t-1}$



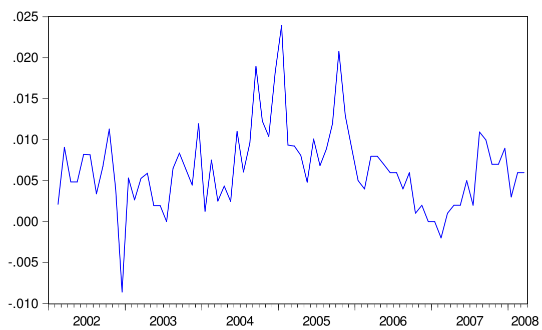
21

Primer 1: obična i parcijalna autokorelaciona funkcija MA(1) modela $X_t = e_t + 0.8e_{t-1}$



22

Primer 2: analiza korelacione strukture osnovne inflacije privrede Srbije, 2002:2-2008:3 (T=74) I



23

Primer 2: analiza korelacione strukture osnovne inflacije privrede Srbije, 2002:2-2008:3 (T=74) II

Docnja (k)	Ocena običnog autokorel.koeficijenta	Značajna korelacija
1	0.493	DA
2	0.355	DA
3	0.338	DA
4	0.275	DA
5	0.101	NE
6	0.166	NE
7	0.127	NE
8	0.025	NE

- Interval poverenja sa verovatnoćom 0.95: [-0.23;0.23]

24

Primer 2: analiza korelacione strukture osnovne inflacije privrede Srbije III

Docnja (k)	Ocena <u>parcijalnog</u> autokorel. koeficijenta	Značajna korelacija
1	0.493	DA
2	0.148	NE
3	0.157	NE
4	0.047	NE
5	-0.145	NE
6	0.117	NE
7	-0.010	NE
8	-0.078	NE

- Interval poverenja sa verovatnoćom 0.95: [-0.23;0.23]
- Zaključak: ovu seriju verovatno treba modelirati na osnovu AR(1) forme.

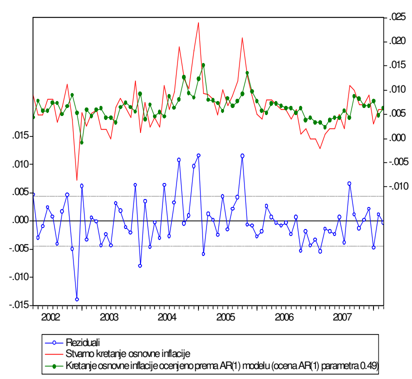
25

Primer 2: analiza korelacione strukture osnovne inflacije privrede Srbije IV (analiza reziduala iz AR(1) modela)

- Autokorelacioni koeficijenti vremenske serije reziduala iz AR(1) modela (sa konstantom) ukazuju na to da je ocenjenim modelom obuhvaćena autokorelacija u seriji osnovne inflacije, jer nije prisutna u rezidualima.

Docnja	Ocena običnog autokorel.koeficijenta
1	-0.059
2	0.033
3	0.145
4	0.174
5	-0.120
6	0.113
7	0.091
8	-0.129

- Interval poverenja sa verovatnoćom 0.95: [-0.23;0.23].



26

Primer 2: analiza korelacione strukture osnovne inflacije privrede Srbije V (analiza reziduala iz AR(1) modela)

$\mathbf{H_0 : \rho_1 = \rho_2 = ... = \rho_m = 0, H_1 : H_0}$ **nije tacno**

$$BLj(m) = Q(m) = T(T+2)\sum_{i=1}^{m}\frac{\hat{\rho}_i^{\,2}}{T-i} : \chi^2_m$$

Serija reziduala iz AR(1) modela : sada je T = 73, $Q(m) : \chi^2_{m-1}$

$\mathbf{H_0 : \rho_1 = \rho_2 = ... = \rho_8 = 0, H_1 : H_0}$ **nije tacno**

$$Q(8) = 73 * 75$$

$$* \left[\frac{(-0.059)^2}{(73-1)} + \frac{(0.033)^2}{(73-2)} + \frac{(0.145)^2}{(73-3)} + \frac{(0.174)^2}{(73-4)} + \frac{(-0.120)^2}{(73-5)} + \frac{(0.113)^2}{(73-6)} + \frac{(0.091)^2}{(73-7)} + \frac{(-0.129)^2}{(73-8)}\right]$$

$Q(8) = 8.69 < \chi^2_7(0.05) = 14.07 \Rightarrow \mathbf{H_0}$ **se ne odbacuje.**

U modelu ne postoji zbirna autokorela cija reda 8.

27