Osnovni pojmovi u Analizi vremenskih serija

Zorica Mladenović

1

Osnovni pojmovi

- Elementarne oznake
- Slučajan proces i vremenska serija
- Stacionarnost
- Autokovarijaciona funkcija
- Autokorelaciona funkcija
  - Obična
  - Parcijalna
- Testovi autokorelacije
- Primeri

2

Elementarne oznake

- Nivo vremenske serije u trenutku t: X_t
- Docnja prvog reda: $t-1$
- Operator docnje prvog reda: $L X_t = X_{t-1}$
- Diferenca prvog reda (obična diferenca):
$$\Delta X_t = X_t - X_{t-1} = (1 - L) X_t$$
- Diferenca reda s (sezonska diferenca):
$$\Delta_s X_t = X_t - X_{t-s} = (1 - L^s) X_t$$

3

Slučajan proces i vremenska serija

- Slučajan proces: niz slučajnih promenljivih koje su uređene u odnosu na vreme
- Uobičajena oznaka:
$$X_1, X_2, \ldots$$
$$X_t, t = 1, 2, \ldots$$
- Vremenska serija:
  - I koncept: jedna realizacija slučajnog procesa
  - II koncept: ne postoji razlika između vremenske serije i slučajnog procesa
- Termine koristimo kao sinonime: vremenski niz slučajnih promenljivih.

4

Stacionarnost I

- Stacionarnost vremenske serije: vremenska serija se kreće po prepoznatljivoj putanji tokom vremena
- Dva koncepta: stroga i slaba stacionarnost
- Definicija slabe stacionarnosti:

$$1.\ E(X_t) = \mu = const,\ t = 1,2,\ldots$$

$$2.\ var(X_t) = E(X_t - \mu)^2 = const,\ t = 1,2,\ldots$$

$$3.\ cov(X_t, X_{t-k}) = E(X_t - \mu)(X_{t\text{-}k} - \mu) = \gamma(k),\ t = 1,2,\ldots,\ k = 1,2,\ldots$$

5

Stacionarnost II

- Očekivana vrednost i varijansa slabo stacionarne vremenske serije su invarijantne u odnosu na vreme. Transliranjem u vremenu ove dve veličine se **ne** menjaju.
- Kovarijansa između članova vremenske serije zavisi samo od rastojanja (docnje), a ne od vremenskog trenutka. To znači da je za datu docnju *k* kovarijansa ista:

$$\mathrm{cov}(X_t, X_{t-k}) = const, \text{ za dato k i t} = 1,2,\ldots$$

6

Najjednostavniji primer stacionarne vremenske serije: beli šum (engl. white noise)

$$E(e_t)=0,\ t=1,2,...$$
$$var(e_t)=E(e_t)^2=\sigma^2=const,\ t=1,2,...$$
$$cov(e_t,e_{t-k})=E(e_t e_{t-k})=0,\ t=1,2,...,\ k=1,2,...$$

- Niz nekorelisanih slučajnih promenljivih nulte srednje vrednosti i stabilne varijanse

7

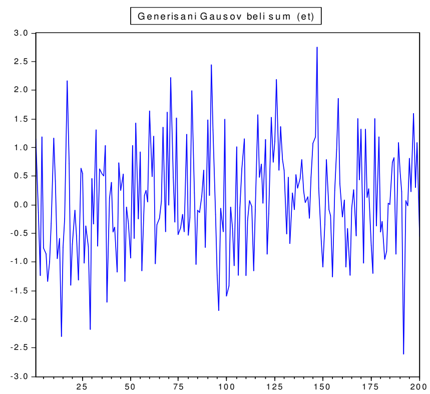
Gausov beli šum

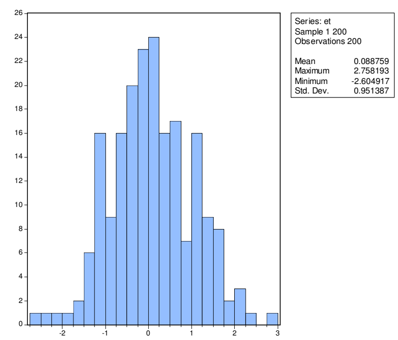
$$E(e_t)=0,\ t=1,2,...$$
$$var(e_t)=E(e_t)^2=\sigma^2=const,\ \mathrm{t}=1,2,...$$
Članovi vremenske serije su nezavisne sl. promenljive $\Rightarrow$
$$\mathrm{cov}(e_t,e_{t-k})=E(e_t e_{t-k})=0,\ \mathrm{t}=1,2,...,\ \mathrm{k}=1,2,...$$
$$e_t : \mathrm{N}\left(0,\sigma^2\right), t=1,2,...$$

- Niz nezavisnih slučajnih promenljivih koje su normalno raspodeljene sa nultom srednjom vrednošću i stabilnom varijansom

8

Gausov beli šum: grafički prikaz





9

Autokovarijaciona funkcija

- Kako utvrditi koji od modela odgovara datom skupu podataka? Potrebno je da analiziramo korelacionu strukturu podatka.
- <u>Autokovarijacioni koeficijent na docnji *k*</u>:

$$\gamma_k = cov(X_t, X_{t-k}) = E(X_t - \mu)(X_{t-k} - \mu), k = 0,1,2,...$$

- Niz $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ predstavlja autokovarijacionu funkciju.
- Svojstva:

1. $\gamma_0 = E(X_t - \mu)^2 = var(X_t)$
2. $\gamma_k = \gamma_{-k}$
3. $|\gamma_k| \le \gamma_0, k = 0,1,2,...$
4. *Matrica autokovarijacionih koeficijenata je pozitivno semidefinitna.*

10

Autokorelaciona funkcija (obična)

- Autokorelacioni koeficijent (obični) na docnji *k*:

$$\rho_k = \frac{cov(X_t, X_{t-k})}{\sqrt{var(X_t)var(X_{t-k})}}, k = 0,1,2,...$$

$$\rho_k = \frac{cov(X_t, X_{t-k})}{var(X_t)} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

- Niz $\rho_1, \rho_2,\ldots$ predstavlja običnu autokorelacionu funkciju.
- Grafički prikaz niza $\rho_1, \rho_2,\ldots$ naziva se obični korelogram.
- EVIEWS oznaka: AC.

11

Autokorelaciona funkcija (obična) II

- Svojstva:

1. $\gamma_0 = E(X_t - \mu)^2 = var(X_t) \Rightarrow \rho_0 = 1$
2. $\gamma_k = \gamma_{-k} \Rightarrow \rho_k = \rho_{-k}$
3. $|\gamma_k| \le \gamma_0 \Rightarrow |\rho_k| \le 1, k = 0,1,2,...$
4. *Matrica autokorelacionih koeficijenata je pozitivno semidefinitna.*

12

Parcijalna autokorelaciona funkcija

- Stepen korelisanosti između X_t i X_{t-k} smo merili na osnovu običnog autokorelacionog koeficijenta na docnji k.
- Autokorelacioni koeficijent na docnji k može biti pod uticajem korelisanosti X_t i X_{t-k} sa članovima vremenske serije na docnjama između vremenskih trenutaka t i $t-k$ ($X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots, X_{t-k+1}$).
- Eliminacijom uticaja $X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots, X_{t-k+1}$ dobija se pokazatelj čiste korelisanosti između X_t i X_{t-k} : parcijalni autokorelacioni koeficijent.
- Ovaj koeficijent na docnji k označava se sa ϕ_{kk}.
- Niz ϕ_{11} ϕ_{22}, ... predstavlja parcijalnu autokorelacionu funkciju.
- Grafički prikaz niza ϕ_{11} ϕ_{22}, ... naziva se parcijalni korelogram.
- EVIEWS oznaka: PAC.

13

Parcijalna autokorelaciona funkcija (definicija na osnovu regresione analize)

1. X_t ocenjujemo u funkciji od $X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots, X_{t-k+1}$ primenom metoda ONK

$\Rightarrow \hat{X}_t$ je deo X_t koji sadrzi uticaj $X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots, X_{t-k+1}$

$\Rightarrow \left(X_t - \hat{X}_t\right)$ je deo X_t koji ne sadrzi uticaj $X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots, X_{t-k+1}$.

2. X_{t-k} ocenjujemo u funkciji od $X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots, X_{t-k+1}$ primenom metoda ONK

$\Rightarrow \hat{X}_{t-k}$ je deo X_{t-k} koji obuhvata dejstvo $X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots, X_{t-k+1}$

$\Rightarrow \left(X_{t-k} - \hat{X}_{t-k}\right)$ je deo X_{t-k} iz koga je iskljucen uticaj $X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots, X_{t-k+1}$.

3. Parcijalni autokorelacioni koeficijent na docnji k definise se kao obicni autokorelacioni koeficijent izmedju $\left(X_t - \hat{X}_t\right)$ i $\left(X_{t-k} - \hat{X}_{t-k}\right)$:

$$\phi_{kk} = \frac{\operatorname{cov}\left[\left(X_t - \hat{X}_t\right), \left(X_{t-k} - \hat{X}_{t-k}\right)\right]}{\sqrt{\operatorname{var}\left(X_t - \hat{X}_t\right)\operatorname{var}\left(X_{t-k} - \hat{X}_{t-k}\right)}}, k = 2,3,\ldots$$

14

Testovi autokorelacije u vremenskoj seriji

1. Da li postoji autokorelacija na tačno određenoj docnji *k*?

   H_0: $\rho_k=0$, H_1: $\rho_k\neq 0$ ili

   (H_0: $\phi_{kk}=0$, H_1: $\phi_{kk}\neq 0$)

2. Da li postoji autokorelacija na svim docnjama zaključno do *m*?

   H_0: $\rho_1=\rho_2=\ldots=\rho_m=0$,

   H_1: Bar jedan od autokorelacionih koeficijenata je različit od nule.

15

Testovi autokorelacije u vremenskoj seriji II

Ocena običnog/parcijalnog autokorelacionog koef.

Uzorak obima $T: X_1, X_2, \ldots, X_T, \overline{X}$ **– aritmeticka sredina**

$$\hat{\rho}_k = \frac{\sum_{t=k+1}^{T}(X_t-\overline{X})(X_{t-k}-\overline{X})}{\sum_{t=1}^{T}(X_t-\overline{X})^2},\quad k=1,\ldots,T-2$$

1. $\hat{\rho}_k$ **je pristrasna, ali konzistentna ocena**
(pod dovoljno opstim uslovima za stacionarnu vremensku seriju)

2. Pod pretpostavkom da ne postoji korelacija na docnji k $(\rho_k=0)$ **za dovoljno veliko** T **vazi :**

$$\hat{\rho}_k : N\left(0,\frac{1}{T}\right) \Rightarrow z=\frac{\hat{\rho}_k-0}{\sqrt{\frac{1}{T}}}=\hat{\rho}_k\sqrt{T} : N(0,1)$$

$$\Rightarrow P\left[-1.96\leq \hat{\rho}_k\sqrt{T}\leq 1.96\right]=0.95 \Rightarrow P\left[-1.96/\sqrt{T}\leq \hat{\rho}_k\leq 1.96/\sqrt{T}\right]=0.95$$

Navedena svojstva vaze i za ocenu $\hat{\phi}_{kk}$ **.**

16

Da li postoji značajna autokorelacija na docnji k? (H_0: $\rho_k=0$, H_1: $\rho_k \neq 0$)

- Validnost hipoteze H_0: $\rho_k=0$ se testira protiv alternativne H_1: $\rho_k \neq 0$, tako što se proverava da li je ocena običnog autokorelacionog koeficijenta na docnji k element intervala $[-1.96/\sqrt{T}, 1.96/\sqrt{T}]$.
- Nulta hipoteza se ne može odbaciti ako je:

$$\hat{\rho}_k \in \left[-1.96/\sqrt{T}, 1.96/\sqrt{T}\right]$$

- Nulta hipoteza se odbacuje za nivo značajnosti 5% ako je:

$$\hat{\rho}_k \notin \left[-1.96/\sqrt{T}, 1.96/\sqrt{T}\right]$$

17

Da li postoji značajna autokorelacija na docnji k? (H_0: $\phi_{kk}=0$, H_1: $\phi_{kk} \neq 0$)

- Validnost hipoteze H_0: $\phi_{kk}=0$ se testira protiv alternativne H_1: $\phi_{kk} \neq 0$ tako što se proverava da li je ocena parcijalnog autokorelacionog koeficijenta na docnji k element intervala $[-1.96/\sqrt{T}, 1.96/\sqrt{T}]$.
- Nulta hipoteza se ne može odbaciti ako je:

$$\hat{\phi}_{kk} \in \left[-1.96/\sqrt{T}, 1.96/\sqrt{T}\right]$$

- Nulta hipoteza se odbacuje za nivo značajnosti 5% ako je:

$$\hat{\phi}_{kk} \notin \left[-1.96/\sqrt{T}, 1.96/\sqrt{T}\right]$$

18

Da li postoji značajna autokorelacija zaključno sa docnjom *m*?
(*H_0: $\rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_m = 0$, H_1: H_0 nije tačno*)

- Box-Pierce-ova, *BP(m)*, i Box-Ljung-ova, *BLj(m)*, test-statistika:

$$BP(m) = T \sum_{i=1}^{m} \hat{\rho}_i^{\,2} : \chi^2_m$$

$$BLj(m) = Q(m) = T(T+2) \sum_{i=1}^{m} \frac{\hat{\rho}_i^{\,2}}{T-i} : \chi^2_m$$

- Nulta hipoteza se odbacuje uz nivo značajnosti 5%
  - ako je *Q(m)* veće od korespondirajuće kritične vrednosti hi-kvadrat raspodele sa *m* stepeni slobode (χ^2_m) i nivo značajnosti *5%.*
  - ako je korespondirajuća *p*-vrednost manja od 5%.
- Broj *m* se definiše kao funkcija od *T*: $\sqrt{T}, 2\sqrt{T}, ln(T)$

19

Testovi autokorelacije: važna napomena

- Svi navedeni testovi mogu se koristiti u klasičnom regresionom modeliranju kada se proverava kvalitet ocenjenog modela.
- Testovi se primenjuju na vremensku seriju reziduala.
- Broj stepeni slobode u primeni *BP* i *BLj* test-statistika je razlika između broja ocenjenih običnih autokorelacionih koeficijenata (*m*) i broja ocenjenih parametara modela (bez slobodnog člana).

20

Primeri:
primena autokorelacione funkcije

1. Izračunavanje ocena običnih autokorelacionih koeficijenata i korespondirajućih standardnih grešaka na osnovu podataka vremenske serije
2. Provera da li je konkretna vremenska serija beli šum
3. Izračunavanje Box-Ljungove test-statistike i transformacija polazne vremenske serije.

21

Primer 1 (uključujući i naredna 4 slajda)

- Sledeća tabela sadrži podatke o 12 opservacija vremenske serije.
- Oceniti obične autokorelacione koeficijente na docnjama 1 i 2.
- Izračunati standardne greške ocena autokorelacionih koeficijenata na docnjama 1 i 2.
- Testirati značajnost prva dva obična autokorelaciona koeficijenta.

22

t	X_t	$X_t - \overline{X}$	$X_{t-1} - \overline{X}$	$X_{t-2} - \overline{X}$
1	13	-3	--	--
2	16	0	-3	--
3	18	2	0	-3
4	14	-2	2	0
5	11	-5	-2	2
6	10	-6	-5	-2
7	8	-8	-6	-5
8	16	0	-8	-6
9	20	4	0	-8
10	20	4	4	0
11	24	8	4	4
12	22	6	8	4
T=12	Zbir:192	Zbir:0		

t	$(X_t - \overline{X})^2$	$(X_t - \overline{X})(X_{t-1} - \overline{X})$	$(X_t - \overline{X})(X_{t-2} - \overline{X})$
1	9	--	--
2	0	0	--
3	4	0	-6
4	4	-4	0
5	25	10	-10
6	36	30	12
7	64	48	40
8	0	0	0
9	16	0	-32
10	16	16	0
11	64	32	32
12	36	48	24
T=12	**Zbir: 274**	**Zbir: 180**	**Zbir: 60**

$$\hat{\rho}_1 = \frac{\sum_{t=2}^{12}(X_t - \overline{X})(X_{t-1} - \overline{X})}{\sum_{t=1}^{12}(X_t - \overline{X})^2} = \frac{180}{274} = 0.657$$

$$\hat{\rho}_2 = \frac{\sum_{t=3}^{12}(X_t - \overline{X})(X_{t-2} - \overline{X})}{\sum_{t=1}^{12}(X_t - \overline{X})^2} = \frac{60}{274} = 0.219$$

$$s^2(\hat{\rho}_1) = s^2(\hat{\rho}_2) = \frac{1}{T} = \frac{1}{12} = 0.083 \Rightarrow \begin{cases} I \; s(\hat{\rho}_1) = 0.289 \\ II \; s(\hat{\rho}_2) = 0.289 \end{cases}$$

Ocena autokorelacionog koeficijenta	0.657	0.219
Standardna greška ocene	0.289	0.289
Interval poverenja (95% verovatnoća)	(-1.96*0.289, 1.96*0.289); (-0.566;0.566)	
Nulta hipoteza	H_0: ρ_1=0	H_0: ρ_2=0
Ispitivanje validnosti H_0	$0.657 \notin [\pm 0.566]$	$0.219 \in [\pm 0.566]$
Zaključak	H_0 se odbacuje.	H_0 se ne odbacuje.

Primer 2 I

- Na osnovu 164 podataka vremenske serije nulte srednje vrednosti i stabilne varijanse ocenjeni su sledeći autokorelacioni koeficijenti (redom na docnjama od 1 do 10):

$\hat{\rho}_1$	$\hat{\rho}_2$	$\hat{\rho}_3$	$\hat{\rho}_4$	$\hat{\rho}_5$	$\hat{\rho}_6$	$\hat{\rho}_7$	$\hat{\rho}_8$	$\hat{\rho}_9$	$\hat{\rho}_{10}$
-0.009	0.456	-0.069	-0.040	-0.073	-0.049	-0.062	-0.059	0.045	-0.038

- Da li se može smatrati da je vremenska serija proces beli šum?

27

Primer 2 II

- Vremenska serija nulte srednje vrednosti i stabilne varijanse je proces beli šum ukoliko njeni članovi nisu korelisani: autokorelacioni koeficijenti na docnjama različitim od nule su jednaki nula.
- Potrebno je proveriti valjanost nulte hipoteze H_0: $\rho_k=0$, protiv alternativne H_1: $\rho_k \neq 0,\ k=1,2,...,10$.
- Ukoliko se nulta hipoteza ne može odbaciti ni za jednu od prvih deset docnji, tada u vremenskoj seriji ne postoji značajna autokorelacija. To sugeriše adekvatnost belog šuma.
- Odgovarajući interval poverenja sa verovatnoćom 95% je

$$[-0.153; 0.153]$$

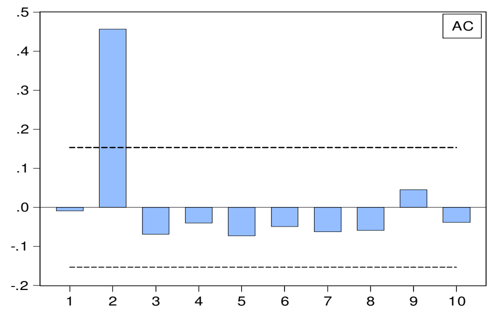
$$\hat{\rho}_2 = 0.456 \notin [-0.153; 0.153]$$

- Zaključujemo da vremenska serija nije beli šum.

28

Primer 2 III

- Grafički prikaz ocena autokorelacionih koeficijenata (korelogram) omogućava brzo zaključivanje.
- Napomena: isprekidane linije označavaju granice intervala poverenja uz verovatnoću 95%, $[-0.153; 0.153]$



29

Primer 3 I

- Prema periodu: prvi kvartal, 2001-treći kvartal, 2014. godine ocenjeno je prvih šest običnih autokorelacionih koeficijenata za *godišnju stopu rasta bruto domaćeg proizvoda Srbije*:

$\hat{\rho}_1$	$\hat{\rho}_2$	$\hat{\rho}_3$	$\hat{\rho}_4$	$\hat{\rho}_5$	$\hat{\rho}_6$
0.702	0.548	0.464	0.212	0.223	0.248

- Kako se iz kvartalnih podataka obrazuje vremenska serija koja meri promene na godišnjem nivou?
- Primenom Box-Ljungove test-statistike ispitati da li postoji značajna autokorelacija zbirnog reda šest.

30

Primer 3 II
Vremenska serija $(1\text{-}L^4)BDP_t = BDP_t - BDP_{t-4}$
(BDP označava logaritmovane vrednosti polaznih podataka)

$$H_0 : \rho_1 = \rho_2 = ... = \rho_m = 0, H_1 : H_0 \text{ nije tacno}$$

$$BLj(m) = Q(m) = T(T+2)\sum_{i=1}^{m}\frac{\hat{\rho}_i^{\,2}}{T-i} : \chi_m^2$$

Polazni uzorak : 55 kvartala

Datom transformacijom gube se 4 podataka, tako da je :

$T = 51$

$$H_0 : \rho_1 = \rho_2 = ... = \rho_6 = 0, H_1 : H_0 \text{ nije tacno}$$

$$Q(6) = 51 * 53$$

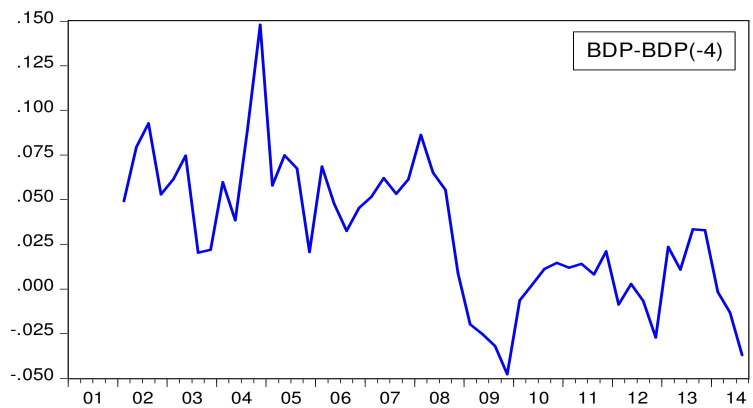
$$* \left[\frac{(0.702)^2}{(51-1)} + \frac{(0.548)^2}{(51-2)} + \frac{(0.464)^2}{(51-3)} + \frac{(0.212)^2}{(51-4)} + \frac{(0.223)^2}{(51-5)} + \frac{(0.248)^2}{(51-6)}\right]$$

$Q(6) = 64.53 > \chi_6^2(0.05) = 12.6 \Rightarrow H_0$ *se odbacuje uz dati nivo znacajnosti.*

Postoji zbirna autokorelacija reda 6.

31

Primer 3 III
Grafički prikaz analizirane vremenske serije



32