VEKTORSKI AUTOREGRESIONI MODELI
VAR MODELI

Zorica Mladenović

Literatura

•Ključne reference

- •Enders (2015), *Applied Econometric Time Series*, Wiley.
- • Hamilton (1994), *Time Series Analysis*, Princeton University Press.
- •Lutkepohl (2005), *New Introduction to Multiple Time Series Analysis* , Springer.
- •Juselius (2006), *The Cointegrated VAR Model*, Oxford University Press.

•Pomoćna referenca

- •Mladenović i Nojković (2014), Primenjena a*naliza vremenskih serija,* EF, Beograd.

Neophodni termini analize

- Vremenska serija
- Stacionarnost
- Beli šum
- Autoregresioni modeli (AR) i
  modeli pokretnih proseka (MA)
- Linearni proces
- Operator docnje L
- Vektorska vremenska serija

Uvod

- Cilj ekonometrijske analize:
  - ocena strukturnih odnosa u ekonomiji
- Strukturni odnosi se uobičajeno modeliraju prema:
  - Sistemu simultanih jednačina
  - VAR modelu
- Postoje dva tipa VAR modela:
  - Standardni (klasični) VAR model
  - Strukturni VAR model
- Podela odgovara distinkciji na redukovanu i strukturnu formu sistema simultanih jednačina.

Polazna forma VAR modela (standardni model)

$$Y_t = \Phi_1 Y_{t-1} + \Phi_2 Y_{t-2} + \ldots + \Phi_p Y_{t-p} + a_t$$

Y_t – vektorska vremenska serija, $n \times 1$,

a_t – vektorski beli šum, $n \times 1$, slucajna greska modela

$\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_p$ – matrice parametara $n \times n$

$$E(a_t a_s') = \begin{cases} \Omega, s = t, n \times n, \text{ kovarijaciona matrica} \\ 0, \text{ostalo} \end{cases}$$

Ovo je VAR model reda **p** i dimenzije **n**.

Polazna forma VAR modela: osnovno ograničenje

- Opterećenost modela parametrima
- Često je neophodno uvesti određene pretpostavke o parametrima modela:

$$\Omega, \Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_p$$

Početak

Sims(1980) "Macroeconomics and Reality" *Econometrica, 48*

Uopštenje jednodimenzione analize na vektorsku vremensku seriju

Z_t = ponuda novca, X_t = kamatna stopa, V_t = dohodak

$$Y_t = \begin{bmatrix} Z_t \\ X_t \\ V_t \end{bmatrix} \qquad Y_t = c + \Phi_1 Y_{t-1} + \Phi_2 Y_{t-2} + \ldots + \Phi_p Y_{t-p} + a_t$$

$$E(a_t) = 0 \quad E(a_t a_\tau') = \begin{cases} \Omega & t = \tau \\ 0 & t \neq \tau \end{cases}$$

Φ_i su matrice

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} \end{bmatrix}^{(1)}$$

Jedna od jednačina sistema

$$Z_t = c_1 + \phi^{(1)}{}_{11} Z_{t-1} + \phi^{(1)}{}_{12} X_{t-1} + \phi^{(1)}{}_{13} V_{t-1} + \ldots +$$

$$\phi_{11}{}^{(p)} Z_{t-p} + \phi_{12}{}^{(p)} X_{t-p} + \phi_{13}{}^{(p)} V_{t-p} + a_{1t}$$

Svaka jednačina ima isti broj parametara

Strukturni VAR(1)

Neka je dat strukturni VAR dimenzije 2: $Y_t=(y_t, x_t)'$, reda 1:

$$y_t = b_{10} - b_{12} x_t + \gamma_{11} y_{t-1} + \gamma_{12} x_{t-1} + \varepsilon_{yt}$$

$$x_t = b_{20} - b_{21} y_t + \gamma_{21} y_{t-1} + \gamma_{22} x_{t-1} + \varepsilon_{xt}$$

- Slučajne greške modela (strukturni šokovi) ε_{yt} i ε_{xt} su procesi beli šum sa standardnim devijacijama redom σ_y and σ_x i korelacijom 0.
- Promenljive y i x su endogene.
- Šok ε_{yt} utiče na y direktno a na x indirektno.
- Model ima 10 parametara za ocenjivanje.

Od strukturnog do standardnog VAR modela

- Strukturni VAR model nije u redukovanoj formi.
- Podsećanje: u redukovanoj formi **y** i **x** su funkcije isključivo od prethodnih vrednosti **y** i **x**.
- Da bi se iz strukturne dobila redukovana forma VAR model zapisujemo u matričnom obliku:

$$\begin{bmatrix} 1 & b_{12} \\ b_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_t \\ x_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{10} \\ b_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{t-1} \\ x_{t-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{yt} \\ \varepsilon_{xt} \end{bmatrix}$$

$$BY_t = \Gamma_0 + \Gamma_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Od strukturnog do standardnog VAR modela II

- Množenje sa B^{-1} omogućava dobijanje standardnog VAR(1) modela:

$$BY_t = \Gamma_0 + \Gamma_1 Y_{t-1} + \varepsilon_t$$
$$Y_t = B^{-1}\Gamma_0 + B^{-1}\Gamma_1 Y_{t-1} + B^{-1}\varepsilon_t$$
$$Y_t = \Phi_0 + \Phi_1 Y_{t-1} + a_t$$

- Došli smo do redukovane forme koja je spremna za ocenjivanje.

Teme:

1. Uslov stabilnosti VAR modela
2. Ocene parametara modela
3. Određivanje reda VAR modela i testovi specifikacije
4. Uzročnost
5. Funkcija impulsnog odziva
6. Dekompozicija varijanse greške predviđanja
7. Strukturni VAR model

Tema:

1. Uslov stabilnosti VAR modela
2. Ocene parametara modela
3. Određivanje reda VAR modela
4. Uzročnost
5. Funkcija impulsnog odziva
6. Dekompozicija varijanse greške predviđanja
7. Strukturni VAR model

Uslov stabilnosti sistema
Uslov stacionarnosti Y_t

$$Y_t - \Phi_1 Y_{t-1} - \Phi_2 Y_{t-2} - \ldots - \Phi_p Y_{t-p} = c + a_t$$

$$(I - \Phi_1 L - \Phi_2 L^2 - \ldots - \Phi_p L^p) Y_t = c + a_t$$

$$\Phi(L) Y_t = c + a_t$$

$\Phi(L)$ je nxn matricni polinom po operatoru docnje L

Element ij od Φ(L) je

$$[\delta_{ij} - \phi_{ij}^{(1)} L - \phi_{ij}^{(2)} L^2 - \ldots - \phi_{ij}^{(p)} L^p] \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

VAR(p) za Y_t je stabilan ako su svih pxn korena (rešenja) donje jednačine strogo veći od jedan po modulu:

$$\left| I_n - \Phi_1 x - \Phi_2 x^2 - \ldots - \Phi_p x^p \right| = 0.$$

$$\mu = (I_n - \Phi_1 - \Phi_2 - \ldots - \Phi_p)^{-1} c$$

Uslov stabilnosti II

$$Y_t - \Phi_1 Y_{t-1} = c + a_t$$

$$Y_t = c + \Phi_1 Y_{t-1} + a_t$$

$$t = 1, Y_1 = c + \Phi_1 Y_0 + a_1$$

$$t = 2, Y_2 = c + \Phi_1 Y_1 + a_2 = c + \Phi_1 (c + \Phi_1 Y_0 + a_1) + a_2$$

$$= (I_n + \Phi_1) c + \Phi_1^2 Y_0 + \Phi_1 a_1 + a_2$$

$$\vdots$$

$$t \qquad Y_t = \left(I_n + \Phi_1 + \Phi_1^2 + \ldots + \Phi_1^{t-1}\right) c + \Phi_1^t Y_0 + \sum_{i=0}^{t-1} \Phi_1^i a_{t-i}$$

Članovi $Y_1, \ldots, Y_t$ kompletno su određeni sa $Y_0, a_1, \ldots, a_t$.

Uslov stabilnosti III

Neka je $t = j+1$

$$Y_t - \Phi_1 Y_{t-1} = c + a_t$$

$$Y_t = \left(I_n + \Phi_1 + \Phi_1^2 + \ldots + \Phi_1^j\right)c + \Phi_1^{j+1} Y_{t-j-1} + \sum_{i=0}^{j} \Phi_1^i a_{t-i}$$

Ako su karakteristične vrednosti matrice Φ_1 po modulu strogo manje od 1, tada je niz $\Phi_1^i, i = 0,1,\ldots$ apsolutno sumirajući. To znači da beskonačna suma $\sum_{i=0}^{\infty} \Phi_1^i$ konvergira ka:

$$\left(I_n + \Phi_1 + \Phi_1^2 + \ldots + \Phi_1^j\right) \to \left(I_n - \Phi_1\right)^{-1}, j \to \infty.$$

Dodatno, element $\Phi_1^{j+1} Y_{t-j-1}, j \to \infty$ konvergira ka nuli dovoljno brzo, što znači da se može ignorisati.

Uslov stabilnosti IV

$$Y_t - \Phi_1 Y_{t-1} = c + a_t$$

$$Y_t = \underbrace{\left(I_n + \Phi_1 + \Phi_1^2 + \ldots\right)}_{(I_n - \Phi_1)^{-1}} c + \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_1^i a_{t-i}$$

$$Y_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_1^i a_{t-i}, \mu = \left(I_n + \Phi_1 + \Phi_1^2 + \ldots\right)c, t = 1,2,3,\ldots$$

Ako su karakteristične vrednosti matrice Φ_1 po modulu strogo manje od 1, proces iskazan kroz VAR(1) model je precizno definisan kao stohastički.

Zaključak: uslov stabilnosti
Karakteristične vrednosti matrice Φ_1 po modulu su strogo manje od 1.

Uslov stabilnosti V

U tom slučaju postoji odgovarajuća vektorska reprezentacija pokretnih sredina beskonačnog reda $MA(\infty)$

$$Y_t = \mu + a_t + \underbrace{\Psi_1}_{\Phi_1} a_{t-1} + \underbrace{\Psi_2}_{\Phi_1^2} a_{t-2} + \ldots = \mu + \Psi(L) a_t$$

$$\Psi(L) = [I_n + \Psi_1 L + \Psi_2 L^2 + \ldots]$$

Ovo je fundamentalna reprezentacija za analizu reakcije vremenske serije na uticaj slučajnog šoka.

Uslov stabilnosti VI

Matrična algebra: svih *n* karakterističnih vrednosti kvadratne matrice Φ_1 su strogo manje od jedan ako i samo ako je ispunjen uslov:

$$|I_n - \Phi_1 x| \neq 0 \textbf{ za svako } |x| \leq 1$$

Sledi :

$$\underbrace{|I_n - \Phi_1 x| = 0}_{\textbf{Resenja jednacine, } x_1,\ldots,x_n \textbf{, su po modulu strogo veca od jedan.}}$$

Uslov stabilnosti
VAR(p) $\longrightarrow$ VAR(1)

Zapisujemo model u formi odstupanja od srednje vrednosti

$$Y_t - \mu = \Phi_1(Y_{t-1} - \mu) + \Phi_2(Y_{t-2} - \mu) + \ldots + \Phi_p(Y_{t-p} - \mu) + a_t$$

Grupišemo članove kao:

$$\eta_t = \begin{bmatrix} Y_t - \mu \\ Y_{t-1} - \mu \\ \vdots \\ Y_{t-p+1} - \mu \end{bmatrix}_{np\times 1} \qquad F = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \ldots & \Phi_{p-1} & \Phi_p \\ I_n & 0 \ldots & 0 & 0 \\ 0 & I_n \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \ldots & I_n & 0 \end{bmatrix}_{np\times np} \qquad u_t = \begin{bmatrix} a_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{np\times 1}$$

$$\eta_t = F\eta_{t-1} + u_t, E\left(u_t u_\tau'\right) = \begin{cases} H, t = \tau \\ 0, \text{ostalo} \end{cases}, \qquad H = \begin{bmatrix} \Omega & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 \end{bmatrix}_{np\times np}$$

STABILAN PROCES:
SVE KARAKTERISTIČNE VREDNOSTI
MATRICE F SU MANJE OD JEDAN PO MODULU

Uslov stabilnosti: primer 1

Neka je dat VAR dimenzije 3, a reda 1:

$$Y_t = c + \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.3 \\ 0 & 0.2 & 0.3 \end{bmatrix} Y_{t-1} + a_t$$

Proveravamo uslov stabilnosti: racunamo determinantu od

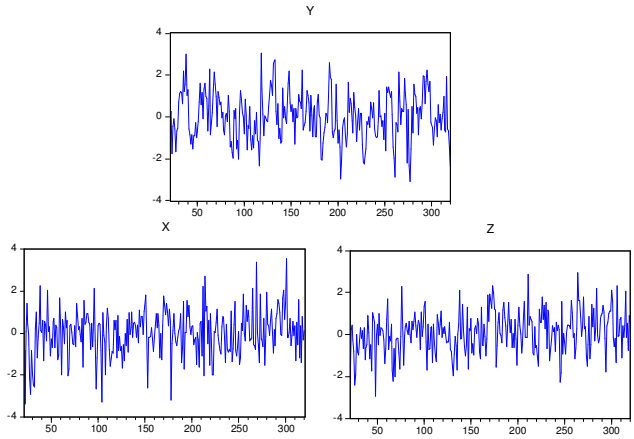
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.3 \\ 0 & 0.2 & 0.3 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1-0.5x & 0 & 0 \\ -0.1x & 1-0.1x & -0.3x \\ 0 & -0.2x & 1-0.3x \end{bmatrix}$$

Vrednost determinante izjednacavamo sa nulom:

$$(1 - 0.5x)\left(1 - 0.4x - 0.03x^2\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = 2.1525, x_3 = -15.4858$$

Kako su sva resenja po modulu strogo veca od 1 dati proces je stabilan.

Primer 1: grafički prikaz



Uslov stabilnosti: primer 2

Neka je dat VAR dimenzije 2, a reda 2:

$$Y_t = c + \begin{bmatrix} 0.5 & 0.1 \\ 0.4 & 0.5 \end{bmatrix} Y_{t-1} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.25 & 0 \end{bmatrix} Y_{t-2} + a_t$$

Proveravamo uslov stabilnosti: racunamo determinantu od

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.5 & 0.1 \\ 0.4 & 0.5 \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.25 & 0 \end{bmatrix} x^2$$

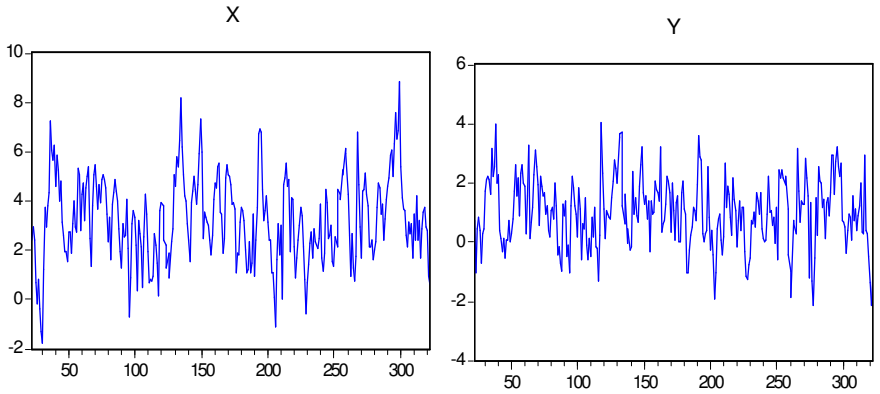
Vrednost determinante izjednacavamo sa nulom:

$$\left(1 - x + 0.21x^2 - 0.025x^3\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 1.3, x_2 = 3.55 + 4.26i, x_3 = 3.55 - 4.26i$$

$i = \sqrt{-1}$, Moduo od x_2 i x_3: $\sqrt{3.55^2 + 4.26^2} = 5.545.$

Sva tri resenja su po modulu strogo veca od jedan: model je stabilan.

Primer 2: grafički prikaz

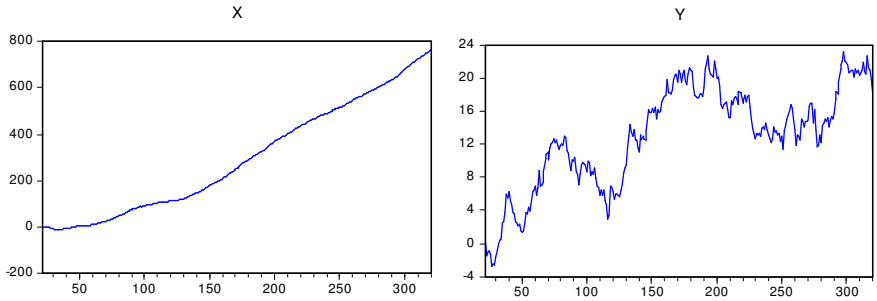


Primer 3: nestabilan VAR
Oba rešenja su jedan

$$Y_t = c + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.1 & 1 \end{bmatrix} Y_{t-1} + a_t$$

Determinantu izjednacavamo sa nulom:

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.1 & 1 \end{bmatrix} x\right) = 0 \Rightarrow (1-x)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 1.$$



Tema:

1. Uslov stabilnosti VAR modela
2. Ocene parametara modela
3. Određivanje reda VAR modela
4. Uzročnost
5. Funkcija impulsnog odziva
6. Dekompozicija varijanse greške predviđanja
7. Strukturni VAR model

Ocena parametara VAR modela
Metod običnih najmanjih kvadrata
Metod maksimalne verodostojnosti

Primena metoda obicnih najmanjih kvadrata, ONK ,

$$Y_t = c + \Phi_1 Y_{t-1} + \Phi_2 Y_{t-2} + \ldots + \Phi_p Y_{t-p} + a_t, a_t : N(0, \Omega)$$

$$\left.\begin{array}{l} \textbf{Matrica parametara nagiba : } \mathbf{A'} = \left[c \;\; \Phi_1 \;\; \Phi_2 \ldots \Phi_p\right], n \times (np+1) \\ \textbf{Kovarijaciona matrica } \Omega, n \times n \end{array}\right\} ?$$

Poznato $T + p$ **vrednosti :** $Y_{-p+1}, \ldots, Y_0, Y_1, \ldots, Y_T$ **za svaki od** n **clanova** Y_t

Neka je : $X_t = \left[1 \;\; Y_{t-1} \ldots Y_{t-p}\right]$ **vektor** $(np+1) \times 1$

VAR u kondenzovanoj formi :

$$\underset{[n \times 1]}{Y_t} = \underset{[n \times (np+1)]}{\mathbf{A'}} \underset{[(np+1) \times 1]}{X_t} + a_t$$

$$\textbf{ONK ocena : } \mathbf{A'} = \left(\sum_{t=1}^{T} Y_t X_t'\right)\left(\sum_{t=1}^{T} X_t X_t'\right)^{-1}$$

Metod maksimalne verodostojnosti (uslovni), MMV :

VAR u kondenzovanoj formi : $Y_t = \mathbf{A'} X_t + a_t$

Log. funkcije verodostojnosti uzorka :

$$l(parametri) =$$

$$= -\frac{Tn}{2} ln(2\pi) - \frac{T}{2} ln|\Omega| - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}(Y_t - \mathbf{A'} X_t)' \Omega^{-1}(Y_t - \mathbf{A'} X_t)$$

$$= -\frac{Tn}{2} ln(2\pi) - \frac{T}{2} ln|\Omega| - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T} a'_t \Omega^{-1} a_t$$

Odnos dva metoda: ocene su identične

$$\textbf{ONK}: \hat{\mathbf{A}} = \left(\sum_{t=1}^{T} Y_t X_t'\right)\left(\sum_{t=1}^{T} X_t X_t'\right)^{-1}$$

MMV : Ocena koja minimizira vrednost :

$$\sum_{t=1}^{T}(Y_t - \mathbf{A'} X_t)' \Omega^{-1}(Y_t - \mathbf{A'} X_t)$$

$$= \sum_{t=1}^{T}\left(Y_t - \hat{\mathbf{A}}' X_t + \hat{\mathbf{A}}' X_t - \mathbf{A'} X_t\right) \Omega^{-1}\left(Y_t - \hat{\mathbf{A}}' X_t + \hat{\mathbf{A}}' X_t - \mathbf{A'} X_t\right) =$$

$$= \sum_{t=1}^{T}\left(\hat{a}_t + (\hat{\mathbf{A}} - \mathbf{A})' X_t\right) \Omega^{-1}\left(\hat{a}_t + (\hat{\mathbf{A}} - \mathbf{A})' X_t\right) =$$

$$= \sum_{t} \hat{a}'_t \Omega^{-1} \hat{a}_t + \sum_{t} X'_t (\hat{\mathbf{A}} - \mathbf{A}) \Omega^{-1} (\hat{\mathbf{A}} - \mathbf{A})' X_t + 2\sum_{t} \hat{a}'_t \Omega^{-1} (\hat{\mathbf{A}} - \mathbf{A})' X_t$$

Napomena – **poslednji element je skalar i jednak nuli** *:*

$$\sum_{t} \hat{a}'_t \Omega^{-1} (\hat{\mathbf{A}} - \mathbf{A})' X_t = tr\left[\sum_{t} \hat{a}'_t \Omega^{-1} (\hat{\mathbf{A}} - \mathbf{A})' X_t\right] =$$

$$= tr\left[\sum_{t} \Omega^{-1} (\hat{\mathbf{A}} - \mathbf{A})' X_t \hat{a}'_t\right] = tr\left[\Omega^{-1} (\hat{\mathbf{A}} - \mathbf{A}) \sum_{t} X_t \hat{a}'_t\right] = 0$$

$$\min\left[\sum_{t=1}^{T}(Y_t - A'X_t)'\Omega^{-1}(Y_t - A'X_t)\right] =$$

$$\min\left[\sum_t \hat{a}'_t\,\Omega^{-1}\hat{a}_t + \sum_t X'_t\,(\hat{A} - A)\Omega^{-1}(\hat{A} - A)'X_t\right]$$

Kako je Ω pozitivno definitna matrica $\rightarrow \Omega^{-1}$ je takodje pozitivno definitna.

Gornji izraz ima najmanju vrednost za $\hat{A} = A$.

Ocena kovarijacione matrice Ω izvedena za dato $\hat{A}$

$$\ell(\Omega, \hat{\mathbf{A}}) = -\frac{Tn}{2}ln(2\pi) - \frac{T}{2}ln|\Omega| - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\hat{a}'_t\,\Omega^{-1}\hat{a}_t$$

Cilj : naci simetricnu pozitivno definitnu matricu koja maksimizir a gornji izraz.

$$\frac{\partial\ell(\Omega, \hat{\mathbf{A}})}{\partial\Omega} = 0 \Rightarrow \hat{\Omega} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\hat{a}_t\hat{a}'_t$$

Ocena kovarijacione matrice

$$\hat{\Omega} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\hat{a}_t\hat{a}'_t = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_{11}^2 & \hat{\sigma}_{12} & \dots & \hat{\sigma}_{1n} \\ & \hat{\sigma}_{22}^2 & \dots & \hat{\sigma}_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \hat{\sigma}_{nn}^2 \end{bmatrix}$$

Elementi kovarijacione matrice $\hat{\Omega}$ na glavnoj dijagonali :

$$\hat{\sigma}_{ii}^2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\hat{a}_{it}^2,\ i = 1,\dots,n.$$

Rezidualna suma kvadrata iz jednacine *i* podeljena obimom uzorka *T*

Elementi kovarijacione matrice $\hat{\Omega}$ van glavne dijagonale :

$$\hat{\sigma}_{ij} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\hat{a}_{it}\hat{a}_{jt},\ i, j = 1,\dots,n,\ i \neq j.$$

Zbir proizvoda reziduala iz svake dve jednacine podeljen obimom uzorka *T*

Tema:

1. Uslov stabilnosti VAR modela
2. Ocene parametara modela
3. Određivanje reda VAR modela i specifikacija
4. Uzročnost
5. Funkcija impulsnog odziva
6. Dekompozicija varijanse greške predviđanja
7. Strukturni VAR model

Određivanje reda VAR modela

1. Testiranje značajnosti parametara
   - Test količnika verodostojnosti
   - Direktna provera značajnosti pojedinih parametara
2. Informacioni kriterijumi
3. Testovi autokorelacije
4. Testovi normalnosti

Test količnika verodostojnosti

Maksimum log funkcije verodostojnosti za dobijene ocene

$$\ell(\hat{\Omega},\hat{\mathbf{A}}) = -\frac{Tn}{2}ln(2\pi) - \frac{T}{2}ln\left|\hat{\Omega}\right| - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\hat{a}'_t\,\hat{\Omega}^{-1}\hat{a}_t$$

$$\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\hat{a}'_t\,\hat{\Omega}^{-1}\hat{a}_t = \frac{1}{2}tr\left[\sum_{t=1}^{T}\hat{a}'_t\,\hat{\Omega}^{-1}\hat{a}_t\right] = \frac{1}{2}tr\left[\sum_{t=1}^{T}\hat{\Omega}^{-1}\hat{a}_t\hat{a}'_t\right] =$$

$$= \frac{1}{2}tr\left[\hat{\Omega}^{-1}T\hat{\Omega}\right] = \frac{1}{2}tr\left[TI_n\right] = \frac{Tn}{2}$$

$$\ell(\hat{\Omega},\hat{\mathbf{A}}) = -\frac{Tn}{2}ln(2\pi) - \frac{T}{2}ln\left|\hat{\Omega}\right| - \frac{Tn}{2} = -\frac{Tn}{2}\left(ln(2\pi)+1\right) - \frac{T}{2}ln\left|\hat{\Omega}\right|$$

Postavljamo sledeće hipoteze

H_0 : VAR (p_0)

H_1 : VAR (p_1)

p_1 je vece od p_0

Test količnika verodostojnosti II

Ako je istinita hipoteza H_0 ocenjuje se VAR reda p_o :

$$\hat{\mathbf{A}}_0, \hat{\Omega}_0, \ell^*_0 = -\frac{Tn}{2}\left(ln\,2\pi + 1\right) - \frac{T}{2}ln\left|\hat{\Omega}_0\right|$$

Ako je istinita hipoteza H_1 ocenjuje se VAR reda p_1 :

$$\hat{\mathbf{A}}_1, \hat{\Omega}_1, \ell^*_1 = -\frac{Tn}{2}\left(ln\,2\pi + 1\right) - \frac{T}{2}ln\left|\hat{\Omega}_1\right|$$

Test kolicnika verodostojnosti :

$$LR = -2\,ln\frac{\textbf{(f. verod. pod } H_0\textbf{)}}{\textbf{(f. verod. pod } H_1\textbf{)}} = 2(\ell^*_1 - \ell_0^*)$$

$$= T\left\{ln\left|\hat{\Omega}_0\right| - ln\left|\hat{\Omega}_1\right|\right\}$$

$$LR : \chi_m^2 \qquad m - broj\ \textbf{ogranicenja} = n^2(p_1 - p_0)$$

U svakoj jednacini : $p_1 - p_0$ **ogranicenja na svaku promenljivu**

ukupno $n(p_1 - p_0)$ **u svakoj jednacini**

ukupno $n^2(p_1 - p_0)$ **u celom VAR modelu.**

Test količnika verodostojnosti III

Test kolicnika verodostojnosti :

$$LR = T\left\{ ln\left|\hat{\Omega}_0\right| - ln\left|\hat{\Omega}_1\right| \right\}$$

Modifikacija Simsa :

$$LR = (T - \text{broj parametara u svakoj jednacini})\left\{ ln\left|\hat{\Omega}_0\right| - ln\left|\hat{\Omega}_1\right| \right\}$$

$$LR = (T - k)\left\{ ln\left|\hat{\Omega}_0\right| - ln\left|\hat{\Omega}_1\right| \right\}$$

$$k = 1 + np_1$$

ALGORITAM TESTIRANJA :

1. **Polazi se od apriorne vrednosti** p_1
2. **Testiranje se sprovodi sekvencijalno unazad**
   Na primer : H_0 **: 3 docnje,** H_1 **: 4 docnje,**
   H_0 **: 2 docnje,** H_1 **: 3 docnje, itd.**
3. **Testiranje se zavrsava fazom u kojoj se po prvi put odbacuje nulta hipoteza.**

Test količnika verodostojnosti: primer VAR realnog deviznog kursa i realnog novca m3 Period: 2002:1-2007:12 (72 podatka)

H_0: VAR(1)	H_1:VAR(2)
$\left\|\hat{\Omega}_1\right\|$	$\left\|\hat{\Omega}_2\right\|$
$4.8677522*10^{-8}$	$4.3193651*10^{-8}$
$LR = \chi_4^2 = 70*\left(ln(4.8677522*10^{-8}) - ln(4.3193651*10^{-8})\right) = 8.37$	
$\chi_4^2(0.05) = 9.49$ $\chi_4^2(0.10) = 7.78$	

Napomene:
1. Efektivni uzorak korišćen za ocenu VAR(2), pa zato i VAR(1) je 70.
2. Kako VAR(2) model ima ukupno 4 parametra više za ocenjivanje od VAR(1) modela, to je broj stepeni slobode u primeni testa 4.

Rezultat: Uz nivo značajnosti od 10% prihvata se značajnost druge docnje u VAR modelu i opravdanost VAR(2) specifikacije.

Test značajnosti pojedinih parametara

•U slučaju kada je VAR model stabilan, a slučajna komponenta vektorski proces beli šum sa višedimenzionom normalnom raspodelom metodom ONK dobijaju se **nepristrasne i konzistentne** ocene parametara koje su **normalno** raspodeljene.

•Moguće je primeniti standardnu teoriju statističkog zaključivanja.

•Možemo koristiti standardnu t i F statistiku.

Informacioni kriterijumi u VAR modelu

• Kao i kod jednodimenzionog AR modela, i kod višedimenzionog VAR modela, funkcija informacionog kriterijuma (IC) se koristi za izbor optimalnog broja docnji.

• Optimalan broj docnji jeste ona vrednost **p** kojom se minimizira funkcija IC(p)

$$AIC = ln\left|\hat{\Omega}\right| + 2\frac{\overbrace{\left(n^2 p + n\right)}^{\substack{\textbf{ukupan broj}\\ \textbf{parametara sistema}}}}{T}$$

$$SC = ln\left|\hat{\Omega}\right| + \left(\mathbf{ln}(\mathbf{T})\right)\frac{\left(n^2 p + n\right)}{T}$$

$$HQC = ln\left|\hat{\Omega}\right| + \left(2\,ln\,\mathbf{ln}(\mathbf{T})\right)\frac{\left(n^2 p + n\right)}{T}$$

• Akaikeov, Švarcov i Hana-Kvinov

•Primena ima smisla jedino ako su reziduali VAR modela neautokorelisani sa aproksimativno normalnom raspodelom.

Testiranje postojanja autokorelacije

- Pojedinačna analiza reziduala svake jednačine
  - Analiza korelacionih koeficijenata reziduala svake jednačine
  - Analiza unakrsnih korelacionih koeficijenata iz svake dve jednačine
    - Obe analize sprovode se za rastuće docnje
- Zbirna analiza reziduala u celom VAR modelu
  - Višedimenzioni BG (Brojš-Godfrijev) test
  - Višedimenzioni BLj (Boks-Ljungov) test

Višedimenzioni BLj test

- Nulta hipoteza: ne postoji, kako autokorelacija kod individualnih komponenti vektorske vremenske serije, tako i unakrsna korelacija između tih komponenti. Alternativnom hipotezom se sugeriše suprotno.
- Oznaka statistike za testiranje zbirne autokorelacije i unakrsne korelacije reda h u VAR modelu sa n jednačina: $Q_n(h)$

$$Q_n(h) = T^2 \sum_{j=1}^{h} \frac{1}{(n-j)} tr\left(\hat{\Gamma}_j' \hat{\Gamma}_0^{-1} \hat{\Gamma}_j \hat{\Gamma}_0^{-1}\right),$$

$\hat{\Gamma}_j$ – **ocena kovarijacione matrice vektora reziduala na docnji** j

$$\Gamma_j = E\left(a_t a_{t-j}'\right)$$

- Ako je tačna nulta hipoteza $Q_n(h)$ poseduje asimptotski χ^2 raspodelu sa $n^2(h-p)$ stepeni slobode.

Testiranje normalnosti slučajne greške modela I

•Postoji više testova čijom primenom se proverava da li je slučajna greška VAR modela normalno raspodeljena:

- Lutkepolov (engl. Lutkepohl) test
- Dornik-Hansenov (engl. Doornik-Hansen) test.

•Oba testa zasnivaju se na JB testu normalnosti, kojim se ispituje da li treći i četvrti centalni moment date serije reziduala odgovaraju korespondirajućim momentima normalne raspodele.

• U okviru VAR modela neophodno je obrazovati međusobno nekorelisane serije reziduala.

•Za tako transformisane serije reziduala računa se, prvo, jednodimenziona JB test-statistika. Potom se dobijene individualne vrednosti sabiraju, što daje višedimenzionu verziju test-statistike normalnosti.

Testiranje normalnosti slučajne greške modela II

•Pri tačnoj nultoj hipoteze o normalnosti obe višedimenzione test-statistike normalnosti poseduju asimptotski χ^2 raspodelu sa brojem stepeni slobode 2*n, gde je n broj jednačina VAR modela , budući da se dobijaju kao zbir od n slučajnih promenljivih, od kojih svaka ima χ^2 raspodelu sa *2* stepena slobode.

• Lutkepolov test je osetljiv na promenu redosleda jednačina VAR modela, dok je Dornik-Hansenov test invarijantan u odnosu na taj redosled.

• U praksi se ostvaruje dodatna korekcija Dornik-Hansenove test-statistike kako bi se obezbedila preciznija aproksimacija χ^2 raspodelom. Ova korekcija prisutna je i u programskom paketu EVIEWS, s tim što različite verzije paketa ne daju istovetne rezultate.