*Zorica Mladenović**

PRAKTIČNI PROBLEMI KOINTEGRACIONE ANALIZE

APSTRAKT: *U radu smo izložili rešenja pojedinih praktičnih problema kointegracione analize. Razmatrali smo sledeće faze u primeni Johansen-ove procedure: specifikacija polaznog modela, izbor broja kointegracionih vektora, modeliranje determinističke komponente i upotreba parcijalnih sistema. Ovaj metodološki okvir je najčešće zastupljen u makroekonometrijskoj analizi nestacionarnih vremenskih serija, kako zbog svoje celovitosti, tako i zbog mogućnosti jednostavnog modeliranja na bazi statističkog softvera. Međutim, kao što nepotpuno poznavanje metodologije može učiniti nesvrsishodnom upotrebu statističkog softvera, tako, razumevanje suštine metodologije daje savremenom softveru veliku moć. Smisao ovog rada jeste afirmacija (korektne) primene kointegracionih metoda.*

ABSTRACT: *In this paper the solutions to some practical problems of cointegration analysis are discussed. We mainly focused on the following phases of the Johansen procedure: the baseline model specification, the determination of the number of cointegrating vectors, the inclusion of the deterministic components and design of partial models. This is the most commonly used approach in analyzing nonstationary macroeconomic time series, due to its complexity and simple modeling based on the computer packages. However, as the application of statistical packages may be useless when methodology is partly known, its full understanding makes computer software a reliable source. The purpose of this paper is to popularize (correct) application of cointegration methods.*

1. UVOD

Koncept kointegracije predstavlja osnovni metodološki okvir za modeliranje makroekonomskih vremenskih serija. Koncept je formalno definisan u radu Engle-a i Granger-a „Cointegration and Error-Correction: Representation, Estimation and Testing", koji je objavljen u časopisu *Econometrica* 1987. godine. Rad označava početak intenzivnog interesovanja ekonometričara za probleme kointegracione analize, čije rešavanje je obeležilo razvoj ekonometrije poslednjih petnaest godina.

Brz razvoj kompjuterskog softvera doprineo je popularizaciji primene kointegracione analize u empirijskim istraživanjima. Međutim, jednostavna upotreba statističkih paketa dovela je do pada interesovanja za razumevanje suštine pojedinih statističkih metoda. Danas nije retka situacija da se primenom kointegraci-

* Ekonomski fakultet, Beograd

onih (kao i ostalih ekonometrijskih metoda) bave i oni koji dovoljno dobro ne poznaju metodologiju. Otuda se prirodno nameće pitanje relevantnosti tako dobijenih ekonometrijskih i ekonomskih rezultata.

Cilj ovog rada jeste da ukaže na pojedine probleme koji se mogu javiti prilikom primene kointegracione analize u praksi. Predmet našeg interesovanja jeste jedna od najčešće korišćenih kointegracionih metoda, koja je po autoru poznata kao Johansen-ova procedura [7]. U pitanju je pristup koji omogućava kompletnu kointegracionu analizu makroekonomskih vremenskih serija. Na osnovu Johansen-ove procedure mogu se izvesti pouzdani ekonomski zaključci, jedino ako je metod pravilno primenjen. To podrazumeva poznavanje: 1. osnovne ideje metodologije, 2. ograničenja u praktičnoj primeni i 3. mogućih modifikacija osnovnog pristupa.

Struktura rada je sledeća. Ekonomska interpretacija kointegracije je data u odeljku 2. U odeljku 3 smo analizirali specifikaciju polaznog modela Johansenove procedure, koja je objašnjena u narednom 4 delu. U odeljku 5 smo izložili probleme vezane za izbor determinističke komponente.Mogućnost korišćenja parcijalnih modela je razmatrana u odeljku 6.

2. EKONOMSKA INTERPRETACIJA KOINTEGRISANIH SISTEMA

Formalna definicija kointegracije [1],[5],[7]:

Posmatramo p-dimenzioni slučajni vektor X_t:

$$X_t = \left[X_{1t}, X_{2t}, \ldots, X_{pt}\right]'$$

Komponente $X_{1t}, X_{2t}, \ldots, X_{pt}$ su vremenske serije integrisane reda d, što znači da su nestacionarne u smislu posedovanja d jediničnih korena. Ova forma nestacionarnosti se eliminiše transformacijom polazne vremenske serije postupkom diferenciranja d puta.[1]

Komponente vektora X_t su kointegrisane ukoliko postoji matrica $\beta \neq 0$ dimenzije $p \times r$, $r < p$, takva da su linearne kombinacije $\beta' X_t$ nižeg reda integrisanosti od nivoa integrisanosti individualnih serija. Broj r predstavlja broj kointegracionih relacija (vektora), odnosno tzv. rang kointegracije.

Komponente vektora X_t integrisane reda jedan su kointegrisane ukoliko obrazuju bar jednu stacionarnu linearnu kombinaciju. Budući da najveći broj

1 Ako vremenska serija X_{1t} ima jedan jedinični koren, onda je njena prva diferenca, $\Delta X_{1t} = X_{1t} - X_{1t-1}$, stacionarna. Ukoliko data vremenska serija poseduje d jediničnih korena, onda je $\Delta^d X_{1t}$ stacionarna vremenska serija.

makroekonomskih vremenskih serija karakteriše ovaj vid nestacionarnosti, primena koncepta kointegracije ima za cilj da utvrdi da li je određena linearna kombinacija stacionarna. Predmet razmatranja ovog rada jeste kointegraciona analiza koja podrazumeva stacionarnost linearne kombinacije vremenskih serija sa jednim jediničnim korenom.

Na prvi pogled može izgledati da je uslov kointegracione analize suviše restriktivan. Njime se zahteva da linearna kombinacija individualno nestacionarnih vremenskih serija bude stacionarna. Teško je prihvatiti ideju da ova linearna kombinacija poseduje potpuno drugačija statistička svojstva od svojstava njenih komponenti. Međutim, kointegracija prirodno proizilazi iz pojedinih ekonomskih modela. Time se može objasniti izrazita popularnost ovog koncepta u ekonomiji.

Navodimo nekoliko primera koji pokazuju upotrebu kointegracije u ekonomskoj analizi.

Primer 1 - Postojanje dugoročne ravnotežne veze i egzogenost u skupu nestacionarnih vremenskih serija

Ukoliko se date nestacionarne vremenske serije dugoročno nalaze na istoj ravnotežnoj putanji, dok kratkoročno odstupaju od nje, onda su one kointegrisane. Dugoročna ravnotežna veza upravo predstavlja kointegracionu relaciju. To znači da se kretanje razmatranih vremenskih serija koriguje prema putanji dugoročne ravnotežne veze.

Kao i u svakom ekonomskom skupu, i u skupu kointegrisanih promenljivih relevantno je napraviti podelu na endogene i egzogene promenljive. Promenljiva je endogena u odnosu na parametre dugoročne veze, ako je za opisivanje njenog kretanja neophodno poznavanje putanje ravnotežne relacije. Za promenljivu iz kointegracione veze ćemo reći da je slabo egzogena u odnosu na odgovarajuće parametre, ukoliko se njeno kretanje ne prilagođava dugoročnoj ravnotežnoj vezi.

Slabo egzogena promenljiva predstavlja zajednički izvor nestacionarnosti za razmatrani skup promenljivih. Pojedinačno posmatrano, svaka od njih se kreće nepredvidivo tokom vremena, ali rezultanta njihovog zajedničkog kretanja je stacionarna, zato što se eliminiše zajednički stohastički trend. To znači da se kretanje jedne nestacionarne vremenske serije može dobro objasniti na osnovu kretanja druge nestacionarne vremenske serije, jer obe sadrže jedinstven izvor nestacionarnosti. Ovim dolazimo do alternativne interpretacije kointegracije. Skup nestacionarnih vremenskih serija je kointegrisan ukoliko je moguće napraviti podelu na endogene i egzogene promenljive. Slabo egzogena promenljiva se može označiti kao zajednički imenilac nestacionarnosti.

Na primer, kointegraciona analiza osnovnih uzroka jugoslovenske hiperinflacije (1991 - 1994) je pokazala da u sistemu: inflacija, deprecijacija deviznog

kursa i stopa rasta novca, stopa rasta novca predstavlja slabo egzogenu promenljivu [11]. Ova promenljiva je identifikovana kao zajednički stohastički trend u datom sistemu. To znači da je osnovni faktor rasta cena u jugoslovenskoj, kao i u ostalim klasičnim hiperinflacijama, prekomerna ponuda novca.

Primer 2 — Modeli sadašnje vrednosti

Posmatramo dve vremenske serije. Pretpostavimo da je jedna od njih nestacionarna, i da se na osnovu racionalnog predviđanja njenih budućih diskontovanih vrednosti dobija druga vremenska serija. Ovako definisane vremenske serije su kointegrisane, što sledi iz aksioma teorije racionalnih očekivanja da greška predviđanja treba da je stacionarna da bi predviđanje bilo efikasno.

U uslovima hiperinflacije realno je pretpostaviti da su vremenske serije stopa rasta novca, deprecijacija deviznog kursa, inflacija i realni novac integrisane promenljive prvog reda.[2] To može dovesti u pitanje relevantnost ocenjivanja njihovih međuzavisnosti. Na primer, jedan od osnovnih modela u monetarnoj ekonomiji jeste Cagan-ov model tražnje za novcem. Njime se tražnja za novcem opisuje u funkciji od očekivane inflacije na sledeći način:

$$m_t - p_t = -\beta E_t(p_{t+1} - p_t) + e_t \tag{2.1}$$

U ovoj relaciji m_t i p_t su redom logaritmovane vrednosti novca i cena, E_t je operator očekivane vrednosti, β je polu-elasticitet tražnje za novcem i e_t je slučajna greška.

Model (2.1) se može rešiti po p_t, rekurzivnom zamenom unapred. Ako se dalje pretpostavi da ne postoje spekulativni baloni u kretanju cena, onda dolazimo do jednakosti oblika [2]:

$$p_t = (1+\beta)^{-1}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^{i} E_t(m_{t+i} - e_{t+i}) \tag{2.2}$$

Izraz (2.2) je model sadašnje vrednosti cena, kojim se opisuje kretanje cena u zavisnosti od ponderisanog proseka budućih očekivanih vrednosti novca.

Očekivane cene u periodu $t+1$, $E_t(p_{t+1})$, predstavljaju zbir stvarnih cena, p_{t+1} i greške predviđanja, η_{t+1}. Korišćenjem navedene veze, $E_t(p_{t+1}) = p_{t+1} + \eta_{t+1}$, i dodavanjem $\beta\Delta p_t$ na obe strane jednakosti (2.1) dobijamo [14]:

2 Moguće je da vremenske serije u periodu hiperinflacije poseduju, pored jediničnog, i eksplozivan koren. U tom slučaju kointegraciona analiza se zasniva na nešto drugačijem pristupu od standardnog [9].

$$m_t - p_t + \beta\Delta p_t = -\beta\Delta^2 p_{t+1} + (e_t - \beta\eta_{t+1}), \qquad (2.3)$$

$\Delta p_t = p_t - p_{t-1}$ je stopa inflacije i $\Delta^2 p_{t+1} = \Delta p_{t+1} - \Delta p_t$.

Sve promenljive na desnoj strani jednakosti (2.3) su stacionarne.[3] To znači da i kombinacija na levoj strani, $m_t - p_t + \beta\Delta p_t$, treba da je stacionarna. Kako su promenljive realni novac i inflacija nestacionarne, Cagan-ov model tražnje za novcem je validan ukoliko su date promenljive kointegrisane. Primećujemo da je parametar β u Cagan-ovoj funkciji tražnje za novcem istovremeno i kointegracioni parametar date relacije.

Ako na obe strane jednakosti (2.2) dodamo promenljive m_t i $\beta\Delta m_t$, onda nakon sređivanja dobijamo [2]:

$$(m_t - p_t) + \beta\Delta m_t = -(1+\beta)\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^i E_t\Delta^2 m_{t+i} + \text{greška} \qquad (2.4)$$

Sve promenljive na desnoj strani jednakosti su stacionarne. Da bi važio znak jednakosti u smislu nivoa integrisanosti, potrebno je da linearna kombinacija na levoj strani bude stacionarna, što sugeriše kointegrisanost realnog novca i stope rasta novca.

Prema tome, Cagan-ov model predstavlja adekvatnu specifikaciju tražnje za novcem u uslovima hiperinflacije ako su sledeći parovi promenljivih kointegrisani: 1. realni novac i inflacija i 2. realni novac i stopa rasta novca.[4] U radovima posvećenim analizi hiperinflacije ovaj metodološki okvir je korišćen više puta [2],[12],[14].

Primer 3 - Modeli kontrole monetarne politike [8]

Ovim modelima opisuje se aktivnost centralne banke koja se ostvaruje preko određenih instrumenata da bi se obezbedila kontrola izabrane ciljne promenljive. Razmatraju se tri grupe promenljivih. Prva grupa je vezana za instrumente aktivnosti centralne banke, druga grupa označava transmisioni mehanizam preko koga deluje centralna banka, dok je treća grupa skup ciljnih promenljivih. Na

3 Ako Δp_t sadrži jedan jedinični koren, onda je $\Delta^2 p_t$ stacionarno. Slučajna greška Cagan-ovog modela ε_t je stacionarna po definiciji, kao i greška predviđanja η_{t+1}.

4 Pored klasične specifikacije tražnje za novcem (2.1), u analizi hiperinflacije se može koristiti jednačina modifikovanog monetarnog modela deviznog kursa prema kojoj depreciacija deviznog kursa utiče na realni novac, koji se dobija deflacioniranjem nominalnog novca deviznim kursem [12]. U cilju ispitivanja valjanosti modifikovanog Cagan-ovog modela potrebno je proveriti postojanje kointegracije između: 1. realnog novca i depreciacije deviznog kursa i 2. realnog novca i stope rasta novca.

primer, centralna banka može promeniti stopu obavezne rezerve privatnih banaka da bi uticala na nivo novčane mase u cilju kontrole inflacije. Ova mera će dati rezultat jedino ukoliko postoji direktna veza između novca i cena u smislu da novac uzrokuje cene. Alternativno, centralna banka može smanjiti svoju kamatnu stopu ili se direktno uključiti na tržište kako bi uticala na tržišnu kamatnu stopu i preko nje, kao krajnji cilj, na stopu rasta društvenog proizvoda. To će se i desiti jedino ukoliko kamatna stopa dugoročno utiče na nivo privredne aktivnosti.

Politika centralne banke je efikasna, ako je promenljiva transmisionog mehanizma kointegrisana sa ciljnom promenljivom. Pri tome, kretanje ciljne promenljive treba da se odvija oko određene konstantne vrednosti. Drugim rečima, ciljna promenljiva se može kontrolisati, ukoliko je: 1. njeno kretanje predvidivo oko unapred zadate srednje vrednosti i 2. kointegrisana sa promenljivom transmisionog mehanizma [8].

Iako se instrumenti aktivnosti centralne banke menjaju na dnevnom nivou, potrebno je da prođe određeno vreme da bi se procenila njihova efikasnost. Kointegraciona analiza ovde može biti od koristi. Postojanje, odnosno nepostojanje dugoročne relacije između relevantnog skupa promenljivih može unapred ukazati da li će određena ekonomska mera dati željene rezultate ili ne.

Da bi se analizirala aktivnost Centralne banke SAD-a, ostvarena je kointegraciona analiza sledećeg skupa mesečnih vremenskih serija: realni novac, kratkoročna i dugoročna kamatna stopa i stopa inflacije (period: 1985 - 1998.) [8]. Dobijeni empirijski rezultati su u suprotnosti sa opšte prihvaćenim mišljenjem da promena kamatne stope deluje na inflaciju. Preciznije, nije utvrđeno postojanje kointegracije između više varijanti kamatnih stopa i indeksa cena.

3. SPECIFIKACIJA POLAZNOG MODELA

Polazni model u kointegracionoj analizi je vektorski autoregresioni model (VAR model) oblika:

$$X_t = \Pi_1 X_{t-1} + \ldots + \Pi_k X_{t-k} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \ldots, T. \tag{3.1}$$

gde X_t označava p-dimenzioni slučajni vektor (vektor p vremenskih serija), Π_1, ..., Π_k su matrice parametara (dimenzije $p \times p$), ε_t je p-dimenzioni vektor slučajnih greški, koje su normalno raspodeljene i nekorelisane tokom vremena i T je obim uzorka.

Broj uključenih docnji određuje red VAR modela. U ovom slučaju red VAR modela je k.

Osnovna svojstva VAR modela su:
1. model je linearan,
2. parametri modela se ne menjaju tokom vremena i
3. slučajna greška modela ima normalnu raspodelu i nije autokorelisana.

VAR model predstavlja alternativni okvir modeliranja ekonomskih promenljivih u odnosu na klasičan sistem simultanih jednačina. Za razliku od sistema simultanih jednačina u VAR modelu:

- su dinamički odnosi u potpunosti zastupljeni, zato što se svaka promenljiva modelira prema sopstvenim prethodnim vrednostima, kao i prethodnim vrednostima ostalih promenljivih u sistemu;
- ne postoji apriorna podela na endogene i egzogene promenljive i
- ne postoje ograničenja na parametre modela, izuzev ograničenja o njihovoj linearnosti.

Provera specifikacije VAR modela predstavlja prvi korak kointegracione analize. Ona se prevashodno sastoji u analizi reziduala sa ciljem da se utvrdi da li su zadovoljene polazne pretpostavke modela o normalnoj raspodeli i neautokorelisanosti slučajne greške. Takođe je potrebno proveriti da li su parametri modela stabilni. Možemo smatrati da je polazna specifikacija pogrešna ukoliko postoji najmanje jedan od sledećih problema:
1. reziduali nemaju normalnu raspodelu,
2. postoji autokorelacija i
3. parametri su nestabilni.

1. Raspodela reziduala odstupa od normalne u situaciji kada sistem razmatranih promenljivih karakteriše postojanje strukturnog loma, što se manifestuje u pojavi ekstremnih vrednosti reziduala. Prvu informaciju o tome možemo dobiti prema grafičkom prikazu reziduala jednačina VAR modela. Za svaku vrednost koja značajno odstupa od prosečnih potrebno je naći ekonomsko objašnjenje. Možemo smatrati da je strukturni lom identifikovan ukoliko ekstremna iz niza vrednosti reziduala odgovara određenom ekonomskom događaju. Tada je potrebno proširiti polazni model sa odgovarajućim veštačkim promenljivima. Veštačka promenljiva biće definisana u zavisnosti od tipa strukturnog loma. Ukoliko je u pitanju jednokratna promena kretanja, onda se promenljiva definiše tako da uzima vrednosti (0,0,...,0,1,0,...,0). Trajna promena kretanja promenljive modelira se veštačkom promenljivom koja se obrazuje na sledeći način: (0,0,...,0,1,1,...,1).

Formalna statistička analiza normalnosti reziduala ostvaruje se na osnovu odgovarajućih testova normalnosti. Njima se ispituje normalnost reziduala svake jednačine i istovremena normalnost reziduala svih jednačina u sistemu. Najčešće se koristi Shenton-Bowman-ov test koji se definiše prema ocenjenim koeficijentima asimetrije i spljoštenosti. Test analize normalnosti jedne serije poseduje asimptotski χ^2 raspodelu sa dva stepena slobode, pod pretpostavkom da je tačna hipoteza o normalnosti. Višedimenziona test-statistika takođe poseduje χ^2 raspodelu, ali sa brojem stepeni slobode 2p, gde je p broj razmatranih promenljivih. Od interesa je pojedinačno analizirati ocene koeficijenata asimetrije i spljoštenosti, zato što asimetričnost raspodele predstavlja veći problem u ocenjivanju nego što je to spljoštenost koja odstupa od normalne.

2. Autokorelacija reziduala sugeriše da u datoj specifikaciji dinamički odnosi nisu celovito obuhvaćeni. Prema korelogramu, koji daje vizuelni pregled korelacije na različitim docnjama, možemo dobiti prvu informaciju o tome da li autokorelacija postoji ili ne.

Formalno ispitivanje autokorelacije zasniva se na primeni određenih testova. Jedan od najpopularnijih jeste Box-Ljung-ov test autokorelacije koji se zasniva na zbiru kvadrata ocenjenih autokorelacionih koeficijenata reziduala. Postoje dve varijante ovog testa: jednodimenziona i višedimenziona. Primenom jednodimenzionog testa se analizira autokorelacija reziduala svake pojedinačne jednačine. Pod pretpostavkom da je tačna nulta hipoteza o nepostojanju autokorelacije, test-statistika poseduje asimptotski χ^2 raspodelu sa brojem stepeni slobode koji predstavlja razliku broju ocenjenih autokorelacionih koeficijenata i broja ocenjenih parametara. Postojanje autokorelacije u celom VAR modelu ispituje se na osnovu višedimenzione Box-Ljungove test-statistike, koja poseduje asimptotski χ^2 raspodelu sa brojem stepeni slobode: p^{2*} (razlika broja ocenjenih autokorelacionih koeficijenata i broja ocenjenih parametara u svakoj jednačini).

Ukoliko autokorelacija postoji, onda je potrebno povećati red VAR modela u smislu uključivanja promenljivih sa docnjama većeg reda. Ovo je jednostavna izmena, koju, ipak, moramo pažljivo koristiti. Povećanje reda modela podrazumeva veći broja parametara za ocenjivanje. Na primer, u VAR modelu četiri promenljive povećanje reda za jedan znači da u svakoj jednačini broj parametara raste za četiri, odnosno broj stepeni slobode se smanjuje za četiri.

U postupku izbora optimalnog broja parametara koristi se test-statistika, pod nazivom informacioni kriterijum. Ova statistika definiše se kao zbir dve komponente. Prva zavisi od vrednosti determinante kovarijacione matrice reziduala, a druga od broja ocenjenih parametara. Kako su u pitanju dva elementa koja različito reaguju na povećanje broja parametara, statistika predstavlja pokazatelj optimalnog broja parametara. Model sa najmanjom vrednošću informaci-

onog kriterijuma treba prihvatiti za odgovarajući, pod pretpostavkom da su ostala statistička svojstva zadovoljavajuća.

3. Ocenjivanje VAR modela treba da bude zasnovano na uzorku koji ne sadrži fundamentalne promene. U suprotnom, pretpostavka o stabilnosti parametara bi bila narušena, što znači da linearna specifikacija ne bi omogućila adekvatno ocenjivanje. Pažljiv odabir uzorka treba da prethodi ocenjivanju parametara VAR modela.

4. OSNOVE JOHANSEN-OVE METODOLOGIJE

OSNOVNA POSTAVKA

Polazni VAR model (3.1) može se transformisati na različite načine, a da to ne dovede do promene funkcije verodostojnosti. U praksi se najčešće koristi transformacija u formi modela sa korekcijom ravnoteže (equilibrium correction model):[5]

$$\Delta X_t = \Gamma_1 \Delta X_{t-1} + \Gamma_2 \Delta X_{t-2} + \ldots + \Gamma_{k-1} \Delta X_{t-k+1} + \Pi X_{t-1} + \varepsilon_t \qquad (4.1)$$

i

$$\Pi = -I + \Pi_1 + \Pi_2 + \ldots + \Pi_k$$
$$\Gamma_i = -(\Pi_{i+1} + \ldots + \Pi_k), i = 1,2,\ldots,k-1.$$

Ovom specifikacijom razdvajaju se uticaji kratkoročnog i dugoročnog dejstva. Matrice $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{k-1}$ izražavaju efekte kratkoročnih promena. Matrica Π predstavlja meru dugoročnog prilagođavanja u kretanju promenljivih.

Pretpostavimo sada da su elementi X_t nestacionarni, odnosno integrisani prvog reda. Na levoj strani figurišu diference nestacionarnih vremenskih serija, što znači da je red integrisanosti leve strane nula. Na desnoj strani imamo kombinaciju vektora promenljivih koje su integrisane reda nula ($\Delta X_{t-1}, \ldots, \Delta X_{t-k+1}$) i vektora promenljivih koje su integrisane reda jedan (X_{t-1}). Postavlja se pitanje uslova pod kojim može važiti jednakost (4.1) u smislu istog nivoa integrisanosti leve i desne strane.

5. Termin model sa korekcijom ravnoteže danas se koristi umesto termina model sa korekcijom greške. Izraz greška zamenjen je izrazom ravnoteža iz potrebe da se naziv u većoj meri prilagodi stvarnom značenju modela. U pitanju je specifikacija kojom se promena u kretanju izabrane promenljive modelira prema njenom odstupanju od ravnotežne putanje u prethodnom periodu.

Da bi obe strane jednakosti (4.1) bile istog nivoa integrisanosti potrebno je da bude zadovoljen jedan od sledećih uslova:

1. Rang matrice Π je nula. Tada se model (4.1) svodi na VAR model prvih diferenci polaznih promenljivih reda k-1.

2. Rang matrice Π je različit od nule i manji od p, recimo r. U ovom slučaju matrica Π se može predstaviti kao proizvod dve matrice α i β (dimenzije $p \times r$): $\Pi = \alpha\beta'$. Linearne kombinacije $\beta' X_t$ su stacionarne.

Prema tome, kada je rang matrice Π manji od p i različit of nule, onda su komponente vektora X_t kointegrisane. Johansen-ov pristup se sastoji u određivanju ranga matrice Π. U osnovi je ideja da se odredi stepen korelisanosti između ΔX_t i $\beta' X_{t-1}$. Ova korelacija je veća ukoliko postoji veći broj stacionarnih linearnih kombinacija. U slučaju odsustva kointegracije svaka od p kombinacija $\beta' X_{t-1}$ biće nestacionarna, što sugeriše nisku korelaciju između ΔX_t i $\beta' X_{t-1}$.

OCENJIVANJE PARAMETARA VAR MODELA

Pretpostavimo da su komponente vektora X_t kointegrisane, tako da je $\Pi = \alpha\beta'$. Da bismo pojednostavili ocenjivanje modela (4.1) i fokusirali se na ocenu parametara matrica α i β, eliminisaćemo parametre kratkoročne dinamike Γ_1, $\Gamma_2, \ldots, \Gamma_{k-1}$ na sledeći način:

- Ocenjujemo regresiju ΔX_t na $\Delta X_{t-1}, \Delta X_{t-2}, \ldots, \Delta X_{t-k+1}$ i dobijamo reziduale R_{0t}.
- Ocenjujemo regresiju X_{t-1} na $\Delta X_{t-1}, \Delta X_{t-2}, \ldots, \Delta X_{t-k+1}$ i dobijamo reziduale R_{1t}.[6]

Model (4.1) je ekvivalentan modelu:

$$R_{0t} = \alpha\beta' R_{1t} + \varepsilon_t \qquad (4.2)$$

Parametri modela ocenjuju se primenom metoda maksimalne verodostojnosti. Metod se sastoji iz dva koraka. U prvom se ocenjuje matrica α pod pretpostavkom da je matrica β poznata, odnosno da je $\beta' R_{1t}$ skup egzogenih promenljivih. To znači da se ocena α, oznaka: $\hat{\alpha}$, može dobiti primenom metoda običnih najmanjih kvadrata. Ova ocena se potom koristi u odgovarajućoj funkciji verodostojnosti da bi se izvela ocena β, oznaka: $\hat{\beta}$. Prema oceni $\hat{\beta}$ dobija se nova ocena $\hat{\alpha}$.

Pod pretpostavkom da su elementi slučajnog vektora ε_t normalno raspodeljeni, maksimalna vrednost funkcije verodostojnosti je funkcija determinante kovarijacione matrice Ω:

6 Koristimo metod običnih najmanjih kvadrata.

$$L_{\max}^{-2/T}(\beta) = |\Omega(\beta)| + \text{konstantni članovi} \tag{4.3}$$

i

$$\begin{aligned}\Omega(\beta) &= T^{-1}\sum (R_{0t} - \alpha\beta' R_{1t})(R_{0t} - \alpha\beta' R_{1t})' \\ &= T^{-1}\left(\sum R_{0t}R'_{0t} - \sum R_{0t}R'_{1t}\beta\alpha' - \alpha\beta'\sum R_{1t}R'_{0t} + \alpha\beta'\sum R_{1t}R'_{1t}\beta\alpha'\right) \\ &= S_{00} - S_{01}\beta\alpha' - \alpha\beta' S_{10} + \alpha\beta' S_{11}\beta\alpha'\end{aligned}$$

gde je:

$$S_{ij} = T^{-1}\sum_{t=1}^{T} R_{it}R'_{jt}, i, j = 0,1. \tag{4.4}$$

Kada se α zameni sa ocenom izvedenom u prvom koraku (ocena nagiba u regresiji R_{0t} na $\beta' R_{1t}$)

$$\overset{*}{\alpha} = \alpha(\beta) = S_{01}\beta(\beta' S_{11}\beta)^{-1}$$

dobijamo:

$$\begin{aligned}\Omega(\beta) &= S_{00} - S_{01}\beta(\beta' S_{11}\beta)^{-1}\beta' S_{10} - S_{01}\beta(\beta' S_{11}\beta)^{-1}\beta' S_{10} \\ &+ S_{01}\beta(\beta' S_{11}\beta)^{-1}\beta' S_{11}\beta(\beta' S_{11}\beta)^{-1}\beta' S_{10}\end{aligned} \tag{4.5}$$

Konačno:

$\Omega(\beta) = S_{00} - S_{01}\beta(\beta' S_{11}\beta)^{-1}\beta' S_{10}$.

Primenom metoda maksimalne verodostojnosti treba da se dobije ocena $\hat{\beta}$ koja minimizira vrednost $|\Omega(\hat{\beta})|$. Da bi se došlo do ove ocene koristi se sledeći rezultat iz teorije matrica [7]:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B' & C \end{vmatrix} = |A| \cdot |C - B' A^{-1} B| = |C| \cdot |A - BC^{-1}B'| \tag{4.6}$$

i A,B i C su nesingularne kvadratne matrice. Uvodimo smenu:

$S_{00} = \mathrm{B}$
$\beta' S_{11}\beta = \mathrm{C}$
$S_{01}\beta = \mathrm{B}$

Na osnovu izraza (4.6) važi:

$$|S_{00}|\cdot|\beta' S_{11}\beta - \beta' S_{10}S_{00}^{-1}S_{01}\beta|$$
$$=|\beta' S_{11}\beta|\,|S_{00} - S_{01}\beta(\beta' S_{11}\beta)^{-1}\beta' S_{10}|$$

odakle je vrednost determinante kovarijacione matrice slučajnih greški:

$$|\Omega(\beta)| = |S_{00}|\frac{|\beta'(S_{11} - S_{10}S_{00}^{-1}S_{01})\beta|}{|\beta' S_{11}\beta|} \tag{4.7}$$

Sada uzimamo u obzir sledeći rezultat [7]. Posmatramo funkciju matrice x $(p\times r)$ oblika:

$$f(x) = \frac{|x'Gx|}{|x'Fx|}$$

gde su G i F simetrične i pozitivno definitne matrice (dimenzije $p \times p$). Ova funkcija dostiže najmanju vrednost $\rho_1 - \rho_2 \ldots \rho_r$ za $x = (V_1, V_2, \ldots, V_r)$ gde $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_r$ predstavljaju r najmanjih karakterističnih vrednosti rešenja p-dimenzionog sistema:

$$|\rho F - G| = 0 \tag{4.8}$$

kojima odgovaraju redom karakteristični vektori $V_1, V_2, \ldots, V_r$.

Navedeni rezultat ćemo prilagoditi našem problemu određivanja ocene $\hat{\beta}$ koja maksimizira funkciju verodostojnosti u (4.3), odnosno minimizira vrednost determinante kovarijacione matrice $|\Omega(\beta)|$ .Prema (4.7) to je ocena za koju:

$$\frac{|\beta'(S_{11} - S_{10}S_{00}^{-1}S_{01})\beta|}{|\beta' S_{11}\beta|}$$

dostiže najmanju vrednost.

Uvodimo sledeću smenu:

$G = S_{11} - S_{10}S_{00}^{-1}S_{01}$

$F = S_{11}$

$x = \beta$

tako da se relacija (4.8) svodi na:

$$|\rho S_{11} - (S_{11} - S_{10}S_{00}^{-1}S_{01})| = 0 \tag{4.9}$$

odnosno za $\lambda = 1 - \rho$:

$$|\lambda S_{11} - S_{10} S_{00}^{-1} S_{01}| = 0 \qquad (4.10)$$

Rešenjem skupa jednačina (4.10) dobija se p karakterističnih vrednosti $1 > \hat{\lambda}_1 > \ldots > \hat{\lambda}_p > 0$ i p karakterističnih vektora $V = (\hat{V}_1, \ldots, \hat{V}_p)$ koji zadovoljavaju sledeći uslov:

$$\hat{\lambda}_i S_{11} \hat{V}_i = S_{10} S_{00}^{-1} S_{01} \hat{V}_i \ , \ i = 1, 2, \ldots, p \ \text{ i } \hat{V}' S_{11} \hat{V} = I \ .$$

Matrica prvih r karakterističnih vektora:

$$(\hat{V}_1, \ldots, \hat{V}_r) \qquad (4.11)$$

predstavlja traženu ocenu $\hat{\beta}$.

Prema ovoj oceni, dobija se nova ocena $\hat{\alpha}$ kao:

$$\hat{\alpha} = S_{01} \hat{\beta} \qquad (4.12)$$

Maksimalna vrednost funkcije verodostojnosti se izvodi prema:

$$L_{max}^{-2/T} = |S_{00}| \frac{\left| \hat{\beta}' \left(S_{11} - S_{10} S_{00}^{-1} S_{01} \right) \hat{\beta} \right|}{\left| \hat{\beta}' S_{11} \hat{\beta} \right|} = |S_{00}| \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \hat{\lambda}_i \right) \qquad (4.13)$$

TESTIRANJE POSTOJANJA KOINTEGRACIJE

Karakteristična vrednost λ_i, $i = 1, 2, \ldots, p$, pokazuje korelisanost između linearne kombinacije nivoa vremenskih serija $(\beta'_i X_{t-1})$ i diference vremenskih serija (ΔX_t). Pri tome, oba elementa su korigovana za kratkoročnu dinamiku. U multivarijacionoj analizi ovaj pokazatelj korelacije je kvadrat koeficijenta kanoničke korelacije. Što je λ_i bliže vrednosti jedan, to je linearna kombinacija nestacionarnih vremenskih serija u većoj saglasnosti sa stacionarnim delom modela. Ova visoka korelisanost je moguća jedino onda kada linearna kombinacija nestacionarnih promenljivih postaje stacionarna. Tada možemo očekivati da su razmatrane vremenske serije kointegrisane. Suprotno, za $\lambda_i = 0$, linearna kombinacija nestacionarnih promenljivih i stacionarna komponenta modela su slabo korelisane. To znači da je data linearna kombinacija nestacionarnih vremenskih serija i sama nestacionarna, odnosno da ne postoji kointegracija.

Potrebno je utvrditi precizan statistički kriterijum na osnovu koga se može ostvariti diskriminacija između vrednosti, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ koje korespondiraju stacionarnim kombinacijama, i vrednosti $\lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_p$, koje odgovaraju nestacionarnim linearnim kombinacijama. Parametar r predstavlja broj stacionarnih linearnih kombinacija, dok je nestacionarnih $p-r$.

Postavljamo sledeće hipoteze:

$H_0(r)$: $rang(\Pi) = r$, postoji r stacionarnih relacija

$H_1(p)$: $rang(\Pi) = p$, postoji p stacionarnih relacija.

Pod pretpostavkom da je tačna nulta hipoteza maksimalna vrednost funkcije verodostojnosti se dobija iz:

$$L_{\max(r)}^{-2/T} = |S_{00}|\left(1-\hat{\lambda}_1\right)\left(1-\hat{\lambda}_2\right)\cdots\left(1-\hat{\lambda}_r\right)$$

U uslovima važenja alternativne hipoteze maksimalna vrednost funkcija verodostojnosti se zasniva na sledećem izrazu:

$$L_{\max(p)}^{-2/T} = |S_{00}|\left(1-\hat{\lambda}_1\right)\left(1-\hat{\lambda}_2\right)\cdots\left(1-\hat{\lambda}_r\right)\left(1-\hat{\lambda}_{r+1}\right)\cdots\left(1-\hat{\lambda}_p\right)$$

Na osnovu maksimuma ove dve funkcije verodostojnosti možemo obrazovati test-statistiku količnika verodostojnosti na sledeći način:

$$Q\left(H_0(r)/H_1(p)\right)^{-2/T} = \left(\frac{|S_{00}|\left(1-\hat{\lambda}_1\right)\left(1-\hat{\lambda}_2\right)\cdots\left(1-\hat{\lambda}_r\right)}{|S_{00}|\left(1-\hat{\lambda}_1\right)\left(1-\hat{\lambda}_2\right)\cdots\left(1-\hat{\lambda}_r\right)\left(1-\hat{\lambda}_{r+1}\right)\cdots\left(1-\hat{\lambda}_p\right)}\right)$$

odakle je

$$\begin{aligned}\tau_r = -2\ln Q\left(H_0(r)/H_1(p)\right) &= -T\ln\left(\left(1-\hat{\lambda}_{r+1}\right)\cdots\left(1-\hat{\lambda}_p\right)\right)\\ &= -T\sum_{i=r+1}^{p}\ln\left(1-\hat{\lambda}_i\right)\end{aligned} \tag{4.14}$$

Ovim je definisana Johansen-ova test-statistika traga t_r. Njena asimptotska raspodela zavisi od:

1. broja promenljivih (dimenzije vektora X_t) i
2. determinističkih komponenti (koje ćemo razmatrati u narednom delu).

Asimptotska raspodela ne zavisi od kratkoročne dinamike, odnosno od broja docnji k. Međutim, efekat kratkoročne dinamike se ne može zanemariti u uzorcima manjeg obima. Otuda je statistiku τ_r moguće korigovati na taj način što se obim uzorka T zamenjuje sa brojem stepeni slobode u svakoj jednačini (T-kp):

$$-(T-kp)\sum_{i=r+1}^{p}\ln\left(1-\hat{\lambda}_i\right)$$

Algoritam testiranja se odvija na sledeći način. Neka su izračunate vrednosti test-statistika $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p$ dok su odgovarajuće kritične vrednosti $Q_1, Q_2, \ldots, Q_p$.

Testiranje počinje od sledećih hipoteza:

$$H_0(0): rang(\Pi) = 0 \Leftrightarrow r = 0$$
$$H_1(1): rang(\Pi) \neq 0 \Leftrightarrow r = 0 + r_0, 1 \geq r_0 > 0 \Leftrightarrow r \leq 1$$

ili rečima:

$H_0(0)$: nema kointegracije

$H_0(1)$: postoji najmanje jedna stacionarna relacija.

Ukoliko je $\tau_1 > Q_1$ odbacujemo nultu i prihvatamo alternativnu hipotezu o postojanju makar jedne stacionarne kombinacije. Da bismo utvrdili da li je r tačno jedan ili, recimo dva, postavljamo sledeće hipoteze:

H_0 (1): $r = 1$ postoji tačno jedna stacionarna kombinacija
H_1 (2): $r \leq 2$ postoje najmanje dve stacionarne kombinacije

Diskriminaciju između ovih hipoteza ostvarujemo upoređivanjem τ_2 sa Q_2. Ako je $\tau_2 < Q_2$ onda prihvatamo nultu hipotezu i zaključujemo da je $r=1$. Suprotno, za $\tau_2 > Q_2$, prihvatamo kao tačnu alternativnu hipotezu da je r najmanje dva. U ovom slučaju bi testiranje nastavili sve do prihvatanja nulte hipoteze.

Postavlja se pitanje da li se strogo treba pridržavati formalne procedure testiranja ili se mogu koristiti još neki metodi. Testiranje se zasniva na primeni kritičnih vrednosti koje se odnose na asimptotski slučaj i izvedene su pod pretpostavkom da je slučajna greška nekorelisana i normalno raspodeljena. Da bismo izbegli eventualnu grešku zbog korišćenja malog uzorka ili netačne specifikacije, ne moramo izabrati jedinstvenu vrednost r, već možemo obaviti dodatnu analizu

za dve vrednosti, recimo $r=1$ ili $r=2$. U postupku izbora broja kointegracionih vektora sledeće metode mogu biti od koristi [6]:

1. Grafički prikaz svih ocenjenih relacija $\beta_i' R_{t,i}$, $i=1,2,...,p$. Na ovaj način možemo primetiti za koje r kombinacije ispoljavaju stacionarno kretanje.
2. Analiza značajnosti kointegracionih vektora. Ova analiza se sastoji u ispitivanju statističke značajnosti parametara matrice α, koji predstavljaju koeficijente prilagođavanja kretanja vremenske serije putanji dugoročne ravnoteže veze. Na primer, prva kolona matrice α pokazuje u kojoj meri se kretanje svake od promenljivih koriguje prema linearnoj kombinaciji $\beta_1' X_{t-1}$. Kako smo objasnili na početku, dati kointegracioni vektor mora biti statistički značajan bar u jednoj od jednačina iz sistema. U tom smislu možemo biti zadovoljni izborom r ukoliko parametri prilagođavanja vektora $\beta_{r+1}' X_{t-1}$ nisu statistički značajni ili su na granici nivoa značajnosti.
3. Rekurzivna statistika $\bar{T}\ln(1-\lambda_i)$ gde je $\bar{T} = j, j+1,...T, j>0$. Prva vrednost ove statistike se računa za obim uzorka j, gde je j tačka u prvoj polovini uzorka. Potom se računanje nastavlja za uzorke koji se povećavaju za po jednu opservaciju ($j+1$, $j+2$,..., T.) Tako se dobija niz rekurzivnih vrednosti koji linearno raste tokom vremena, pod pretpostavkom da je $\lambda_i \neq 0$. Preciznije, rekurzivno računata vrednost će se linearno povećavati za one vrednosti λ_i koje su značajno različite od nule. Možemo očekivati da broj kointegracionih vektora odgovara broju rekurzivnih statistika koje ispoljavaju rast tokom vremena.

5. ULOGA DETERMINISTIČKE KOMPONENTE

Veliki broj makroekonomskih vremenskih serija ispoljava tendenciju rasta(pada) tokom vremena. To zahteva uključivanje određenih determinističkih komponenti u VAR model. Najčešće se dodaju vektori slobodnog člana i linearnog trenda na sledeći način:

$$X_t = \Pi_1 X_{t-1} + ... + \Pi_k X_{t-k} + \mu_0 + \mu t + \varepsilon_t, t = 1,...,T \qquad (5.1)$$

gde je μ_0 p-dimenzioni vektor slobodnog člana i μ je p-dimenzioni vektor parametara uz linearni trend.

Kointegraciona analiza koristi model sa korekcijom ravnoteže (4.1) u kojem se kao zavisne promenljive javljaju diference promenljivih u polaznom vektoru X_t. Prelaskom sa nivoa X_t na diferencu ΔX_t menja se uloga linearnog determini-

stičkog trenda. Vektor slobodnog člana μ_0 se eliminiše primenom postupka prve diference, dok vektor μt postaje vektor μ.[7] Iako vektor μ figuriše u modelu sa korekcijom ravnoteže kao vektor konstanti, njime se izražava konstantna stopa rasta (pada) vektora X_t.

U modelu sa korekcijom ravnoteže postoji r stacionarnih linearnih kombinacija $\beta' X_{t-1}$, koje mogu biti stacionarne oko nule, oko konstante ili oko linearnog trenda. To znači da ove linearne kombinacije sadrže i odgovarajuće determinističke elemente.

Ista deterministička komponenta može imati ulogu dve različite objašnjavajuće promenljive u modelu sa korekcijom ravnoteže. Ona je istovremeno potrebna za opisivanje kretanja stope rasta polaznih vremenskih serija ΔX_t, ali i stacionarnih linearnih kombinacija $\beta' X_{t-1}$.

Prilikom specifikacije polaznog modela važno je znati odgovore na sledeća pitanja:

1. da li je potrebno uključiti vektor konstanti u model sa korekcijom ravnoteže kao posebnu objašnjavajuću promenljivu,
2. da li je potrebno dodati slobodan član ili trend u stacionarne kombinacije $\beta' X_{t-1}$ i
3. koje kombinacije determinističkih komponenti u odgovorima 1. i 2. su istovremeno moguće.

Odgovori na ova pitanja dobijaju se prema sledećem pregledu.

1. Vremenske serije sadrže linearni deterministički trend. Time se sugeriše uključivanje vektora konstanti μ u model sa korekcijom ravnoteže. Ukoliko su ove vremenske serije kointegrisane, onda se javljaju dve mogućnosti:

1a. Vremenske serije su međusobno usklađene, ali se u njihovom zajedničkom kretanju ne eliminiše individualna deterministička stopa rasta. To znači da linearni trend treba uključiti u kointegracionu vezu.

1b. Stacionarnom linearnom kombinacijom se potire ne samo individualna nestacionarnost, već i individualni deterministički trend. To znači da u kointegracionoj relaciji ne postoje determinističke komponente.

2. Vremenske serije ne sadrže linearni deterministički trend - vektor konstanti μ ne postoji u polaznom modelu. Kointegrisanost ovih vremenskih serija podrazumeva sledeće:

2a. Vremenske serije su stacionarne oko neke srednje vrednosti, što iziskuje prisustvo slobodnog člana u kointegracionoj relaciji.

---

7 Na primer, prva diferenca jednodimenzione vremenske serije

$x_t = \mu_{10} + \mu_{11} t + e_t$ je $\Delta x_t = x_t - x_{t-1} = \mu_{11} t - \mu_{11}(t-1) + e_t - e_{t-1} = \mu_{11} + \Delta e_t$.

2b. Vremenske serije su stacionarne oko nule, tako da nema determinističkih komponenti u kointegracionoj relaciji.

Svaka od razmatranih varijanti 1a, 1b, 2a i 2b menja asimptotsku raspodelu Johansen-ove statistike traga. To znači da je potrebno korišćenje različitih kritičnih vrednosti u svakoj od navedenih varijanti.[8]

Kako modelirati deterministički trend vremenskih serija u konkretnom slučaju? Ne postoji jasan i prezican odgovor. Moguće je koristiti više test-statistika koje su lako dostupne: t-odnos značajnosti determinističkih komponenti u ocenjenom modelu, vrednosti informacionih kriterijuma i sl.

Vizuelni pregled polaznih vremenskih serija može biti dovoljan. Ukoliko sve vremenske serije rastu tokom vremena, onda vektor μ treba uključiti u model. U tom slučaju polazi se od pretpostavke da je komponenta linearnog trenda sastavni deo kointegracione relacije. Pošto se ocene parametri ove relacije, testira se statistička značajnost parametra linearnog trenda. Na osnovu toga odlučujemo da li trend treba ostaviti ili ne. Suštinski, trendom se aproksimira kretanje izostavljene ili kvantitativno nemerljive promenljive u dugoročnoj ravnotežnoj vezi (na primer, produktivnost rada). To znači da postojanje trenda može imati i ekonomsko opravdanje.

Ako se na grafiku vremenskih serija ne uočava svojstvo konstantnog rasta(pada),onda vektor μ treba izostaviti iz polaznog modela. Potrebno je samo utvrditi da li je slobodan član sastavni deo kointegracione veze ili ne.Uključivanjem slobodnog člana u kointegracionu relaciju postiže se stacionarnost oko nule. Odsustvo slobodnog člana znači usklađenost promenljivih oko neke srednje vrednosti koja se razlikuje od nule. Konačnu odluku donosimo prema rezultatu testiranja značajnosti slobodnog člana.

Pogrešno modelirana deterministička priroda vremenskih serija može promeniti smisao rezultata statističkog zaključivanja. Na primer, ako se konstanta neopravdano izostavi iz modela i nepotrebno uključi kao deo ravnotežne relacije, onda primena Johansen-ovog testa može sugerisati da kointegracija postoji i u situaciji kada razmatrane vremenske serije ne obrazuju dugoročnu vezu [3]. Kako u pojedinim programskim paketima ova varijanta (2a) predstavlja standardnu opciju, potrebno je problem detaljnije objasniti.

8 Moguće je da analizirane vremenske serije karakteriše postojanje kvadratnog trenda, što bi značilo proširenje VAR modela sa komponentom oblika $\mu_0 + \mu_1 t + \mu_2 t^2$ (μ_0, μ_1, μ_2 su odgovarajući vektori parametara). Kvadratni trend može poboljšati kvalitet modela u smislu povećanja vrednosti koeficijenta determinacije. Međutim, deterministički kvadratni trend dominira regresijom u statističkom smislu, što onemogućava analizu slučajnog - stohastičkog kretanja, a time i kointegracionih svojstava. Ova specifikacija je teorijski moguća, ali se retko koristi u praksi.

Posmatramo dve nestacionarne vremenske serije, x_t i y_t, koje sadrže determinističku komponentu trenda, odnosno čije diference poseduju konstantni prirast:

$$\Delta x_t = \mu_{11} + e_{1t}$$
$$\Delta y_t = \mu_{22} + e_{2t}$$

Pretpostavimo da x_t i y_t nisu kointegrisane vremenske serije. To znači da je u modelu sa korekcijom ravnoteže:

$$\begin{bmatrix} \Delta x_t \\ \Delta y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} [x_{t-1} y_{t-1}]' + \begin{bmatrix} \mu_{11} \\ \mu_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{bmatrix} = \Pi [x_{t-1} y_{t-1}]' + \begin{bmatrix} \mu_{11} \\ \mu_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{bmatrix}$$

rang matrice Π nula.

Pretpostavimo sada da je vektor konstanti $[\mu_{11} \mu_{22}]'$ izostavljen kao posebna objašnjavajuća promenljiva i uključen u ravnotežnu relaciju. Model sa korekcijom ravnoteže je:

$$\begin{bmatrix} \Delta x_t \\ \Delta y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mu_{11} \\ 0 & 0 & \mu_{22} \end{bmatrix} [x_{t-1} y_{t-1} 1]' + \begin{bmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{bmatrix} = \Pi^* [x_{t-1} y_{t-1} 1]' + \begin{bmatrix} e_{1t} \\ e_{2t} \end{bmatrix}$$

Test kointegracije zasniva se na ispitivanju ranga matrice Π^*. Hipoteza o postojanju kointegracije biće prihvaćena ukoliko se utvrdi da je rang matrice Π^* jedan. Suprotno, hipoteza o odsustvu kointegracije znači da je rang nula.Matrica Π^* je tako definisana da je njen rang jedan. Rezultat primene kointegracionog testa može samo to da potvrdi, što se nekorektno interpretira kao postojanje kointegracije.

Veštačke promenljive takođe predstavljaju determinističku komponentu. Kako smo objasnili, njihovo uključivanje je potrebno u cilju poboljšanja statističkih svojstava VAR modela. Prisustvo veštačkih promenljivih menja asimptotsku raspodelu Johansen-ove statistike traga. U tom slučaju bi bilo korektno da se odgovarajuće kritične vrednosti izvedu primenom metoda simulacije. Ako se koriste standardne tabele kritičnih vrednosti, onda dobijene rezultate treba uzeti sa rezervom. Osim formalnog testa poželjno je koristiti i neke od pomočnih metoda koje su navedene u delu 4.

6. PARCIJALNI SISTEMI

Primenom VAR modela se celovito opisuju dinamički odnosi datih vremenskih serija. Otuda ova specifikacija predstavlja pogodnu formu polazne analize ekonomskih vremenskih serija. Međutim, postoje dva ograničenja primene VAR modela u ispitivanju strukturnih međuzavisnosti. Prvo, ukoliko razmatramo veći skup promenljivih, onda se može javiti problem dimenzije VAR modela, odnosno problem ocenjivanja velikog broja parametara na uzorku konačnog obima. Drugo, tradicionalna analiza strukturnih ekonomskih zavisnosti nije jednostavna, zato što se u VAR modelu objašnjavajuće promenljive javljaju samo sa vremenskim pomakom.

Da bi se primena VAR modela prilagodila zahtevima strukturne ekonomske analize, potrebno je modifikovati njegovu specifikaciju. Cilj je da se posebnim jednačinama opišu samo određene promenljive iz datog skupa. Time se približavamo klasičnom ekonometrijskom modeliranju koje se zasniva na jasnoj podeli promenljivih na zavisne i objašnjavajuće.

U analizi kointegrisanih vremenskih serija relevantna je podela na endogene i slabo egzogene promenljive u odnosu na parametre kointegracionog skupa. Shodno tome, jednačine VAR modela mogu se razvrstati u dva skupa. Prvi skup jednačina opisuje kretanje endogenih promenljivih i uobičajno se naziva parcijalni sistem. Drugim skupom modeliraju se egzogene promenljive kroz tzv. marginalne modele.

Ovde ćemo dati odgovore na dva pitanja:

1. kako ostvariti podelu na endogene i slabo egzogene promenljive u odnosu na parametre kointegracionog skupa i
2. kako testirati postojanje kointegracije u parcijalnom sistemu.[9]

Pretpostavimo da su komponente p-dimenzionog slučajnog vektora X_t kointegrisane sa kointegracionim rangom r. Radi jednostavnosti analize pretpostavimo da je red VAR-a $k=2$. Tada je model sa korekcijom ravnoteže:

$$\Delta X_t = \Gamma_1 \Delta X_{t-1} + \alpha\beta' X_{t-1} + e_t \tag{6.1}$$

Pretpostavimo da se vektor X_t može dekomponovati na vektor Y_t (dimenzije $p_1 \times 1$) i vektor Z_t (dimenzije $p_2 \times 1$): $X'_t = (Y'_t, Z'_t)$. Slično se može ostvariti dekompozicija slučajne greške: $e'_t = (e'_{1t}, e'_{2t})$, kao i matrica odgovarajućih parametara: $\Gamma'_1 = (\Gamma'_{11}, \Gamma'_{21})$, $\alpha' = (\alpha'_1, \alpha'_2)$.

9 Mi ćemo se ovde ograničiti na analizu koja proističe iz Johansen-ove metodologije. Mogući su i drugi pristupi. Videti [10] za detaljan prikaz.

Neka je parcijalni model za ΔY_t dat sledećim izrazom [4]:

$$\Delta Y_t = \omega \Delta Z_t + (\alpha_1 - \omega\alpha_2)\beta' X_{t-1} + (\Gamma_{11} - \omega\Gamma_{21})\Delta X_{t-1} + e_{yt} \qquad (6.2)$$

gde je $\omega = \Omega_{12}\Omega_{22}^{-1}, e_{yt} = e_{1t} - \omega e_{2t}$. [10]

Pretpostavimo da se ΔZ_t opisuje sledećim marginalnim modelom [4]:

$$\Delta Z_t = \alpha_2 \beta' X_{t-1} + \Gamma_{21}\Delta X_{t-1} + e_{2t} \qquad (6.3)$$

Ako je $\alpha_2 = 0$ u (6.3), onda data jednačina ne sadrži infomaciju o kointegraciji. Prema tome, vektor Z_t predstavlja skup slabo egzogenih promenljivih. Dati skup promenljivih „ne reaguje" na infomaciju o postojanju dugoročne ravnotežne veze. To znači da se njihovo kretanje ne prilagođava putanji stacionarne relacije.

Ukoliko promenljive obrazuju jedinstvenu stacionarnu linearnu vezu, podela na endogene i egzogene promenljive je jasno definisana. Međutim, kada je broj kointegracionih relacija veći od jedan, onda je moguće da se jedna promenljiva istovremeno prilagođava parametrima više stacionarnih relacija, kao i da je jedna promenljiva slabo egzogena u odnosu na parametre jedne kointegracione veze, a endogena u odnosu na parametre druge kointegracione relacije. Na primer, u cilju analize visoke inflacije jugoslovenske privrede tokom osamdesetih godina analiziran je sledeći skup mesečnih vremenskih serija: indeks cena na malo, devizni kurs, plate i primarni novac [13]. Utvrđeno je da date vremenske serije obrazuju dve stacionarne relacije. Prvi kointegracioni vektor predstavlja kombinaciju plata, cena i deviznog kursa i značajan je za aproksimiranje kretanja stopa rasta plata i cena. Drugi kointegracioni vektor, koji formiraju plate i novac, je statistički značajan samo u jednačini stope rasta novca. Dakle, plate su endogena promenljiva u odnosu na parametre prve kointegracione veze, ali slabo egzogena promenljiva u odnosu na parametre druge kointegracione relacije.

Ako se ustanovi da su promenljive vektora Z_t slabo egzogene u odnosu na kointegracione parametre ($\alpha_2 = 0$), onda je dovoljno analizirati parcijalni sistem (6.2), koji postaje osnovni okvir kointegracione analize. Model se može predstaviti i na sledeći način:

---

10 $$\Omega = \begin{bmatrix} \underset{(p_1 \times p_1)}{\Omega_{11}} & \underset{(p_1 \times p_2)}{\Omega_{12}} \\ \underset{(p_2 \times p_1)}{\Omega'_{12}} & \underset{(p_2 \times p_2)}{\Omega_{22}} \end{bmatrix}$$

$$\Delta Y_t = \omega \Delta Z_t + \alpha_1 \beta' X_{t-1} + \Gamma_y \Delta X_{t-1} + e_{yt} \qquad (6.4)$$

i $\Gamma_y = (\Gamma_{11} - \omega \Gamma_{21})$. Sada se Johansen-ova metodologija primenjuje na model od p_1 promenljivih, što znači i manji broj jednačina za ocenjivanje. Slabo egzogene promenljive jesu sastavni deo kointegracione relacije, ali se ne modeliraju posebnim jednačinama VAR sistema. Analogno algoritmu ocenjivanja i testiranja koji smo objasnili u delu 4, izvodi se odgovarajuća statistika traga τ_y. Njena asimptotska raspodela zavisi od: broja endogenih promenljivih (p_1), broja slabo egzogenih promenljivih (p_2) i determinističkih komponenti.

Primena ovog pristupa može biti od koristi i u sledećim analizama:

1. Vremenske serije su kointegrisane oko determinističkog trenda koji karakteriše strukturni lom. To iziskuje prisustvo veštačke promenljive u kointegracionoj relaciji. Budući da se veštačka promenljiva ne može modelirati posebnom jednačinom VAR modela, jedna od mogućnosti jeste ocena parcijalnog modela u kojem se veštačka promenljiva tretira kao slabo egzogena promenljiva.
2. Ekonomska teorija može sugerisati prisustvo stacionarne promenljive u kointegracionoj relaciji. Ova promenljiva postaje nestacionarna kumulisanjem tokom vremena. To je forma u kojoj stacionarna promenljiva jedino može biti sastavni deo kointegracione veze. Da bi se izbegli problemi u specifikaciji jednačine VAR modela koja bi opisivala kretanje kumulisane stacionarne promenljive, dovoljno je koristiti parcijalni pristup.

LITERATURA

1. Engle, R.F. and Granger, C.W.J. (1987), „Co-integration and Error-Correction: Representation, Estimation and Testing", Econometrica, 55, 251 - 276.
2. Engsted, T. (1993), „The Hyperinflation Model of Money Demand Revisited „Journal of Money", Credit and Banking, 23, 327 - 351.
3. Gonzalo, J. and Lee, S. (1998), „Pitfalls in Testing for Long Run Relationships", Journal of Econometrics, 129 - 154.
4. Harbo, I., Johansen, S., Nielsen, B. and Rahbek, A. (1998) „Asymptotic Inference on Co-integrating Rank in Partial Systems, „Journal of Business and Economic Statistics", 16, 388- 399.
5. Hendry, D.F. and Juselius, K. (2000), „Explaining Cointegration Analysis: Part I", Energy Journal, 21, 1 - 42.
6. Hendry, D.F. and Juselius, K. (2001), „Explaining Cointegration Analysis: Part II", Energy Journal, u pripremi.
7. Johansen, S. (1996), Likelihood - Based Inference in Cointegrated Vector Autoregressive Models, Oxford University Press, Oxford.
8. Johansen, S. and Juselius, K. (2001), „Controlling Inflation in a Cointegrated Vector Autoregressive Model with an Application to US data", working paper, European University Institute, Florence.
9. Juselius, K. and Mladenović, Z. (2002), „High Inflation, Hyper Inflation and Explosive Roots: The Case of Yugoslavia", http/www.econ.ku.dk/okok/.
10. Ognjanović, K. (2001), Model sa korekcijom greške, magistarska teza, Ekonomski fakultet, Beograd.
11. Petrović, P., Bogetić, Ž. and Vujošević (Mladenović), Ž. (1999): „The Yugoslav Hyperinflation of 1992-1994, Causes, Dynamics and Money Supply Process", Journal of Comparative Economics, 335-353.
12. Petrović, P., and Mladenovic, Z. (2000): „Money Demand and Exchange Rate Determination under Hyperinflation: Conceptual Issues and Evidence from Yugoslavia", Journal of Money, Credit and Banking, 783-806.
13. Petrović, P., and Vujošević(Mladenović), Ž. (2000): „Monetary Accommodation in Transition Economies: Econometric Evidence from Yugoslavia's High Inflation in the 1980s" Journal of Development Economics, 785-806.
14. Taylor, M.P. (1991), „The Hyperinflation Model of Money Demand Revisited" Journal of Money, Credit and Banking, 23, 327 — 351.