

Testovi jediničnog korena

Zorica Mladenović

1

1

Polazne osnove

- Primenom testova zaključujemo
 1. da li serija poseduje jedinične korene ili ne
 2. koliko je tačno jediničnih korena u vremenskoj seriji.
- Postoji veliki broj testova jediničnog korena
 - Diki-Fulerov (DF) test, 1976.

2

2

Dickey-Fuller-ov test jediničnog korena: teme

- Osnovna ideja
- Različite determinističke komponente
- Izračunavanje test-statistike
- Pravilo odlučivanja
- Određivanje broja jediničnih korena
- Prošireni test
- Nedostaci
- Dalja analiza

3

3

DF test jediničnog korena: osnovna ideja

- Polazni model:
$$X_t = \phi X_{t-1} + e_t$$
- Hipoteze:
 H_0 : Serija poseduje jedinični koren, $\phi=1, X_t \sim I(1)$
 H_1 : Serija je stacionarna (oko nule), $\phi < 1, X_t \sim I(0)$
- Alternativna specifikacija polaznog modela:
$$X_t = \phi X_{t-1} + e_t / - X_{t-1}$$

$$\Delta X_t = \phi X_{t-1} + e_t, \phi - 1 = \varphi$$
tako da hipoteze postaju:
 H_0 : Serija poseduje jedinični koren, $\varphi=0, X_t \sim I(1)$
 H_1 : Serija je stacionarna, $\varphi < 0, X_t \sim I(0)$

4

4

DF test za različite determinističke komponente

DF test	τ	τ_{μ}	τ_t
Determinističke komponente	Nema	Konstanta	Konstanta+ Linearni trend
$E(X_t)$	0	μ	$\mu+bt, t=1,2,\dots$
<p>$b>0$, konstantni prirast $\Delta X_t = b + e_t, X_t = b + X_{t-1} + e_t$</p> <p>Parametar uz t u očekivanoj vrednosti vremenske serije odgovara "slobodnom članu" u modelu prve diference serije sa jediničnim korenom</p>			

5

5

DF test za različite determinističke komponente II

- Tri varijante Dickey Fuller-ovog testa (DF test): τ, τ_{μ}, τ_t
- Nulta (H_0) i alternativna (H_1) hipoteza:
 1. τ

$H_0: X_t = X_{t-1} + e_t$, Serija je slučajan hod

$H_1: X_t = \phi X_{t-1} + e_t, \phi < 1$, Serija je stacion. oko nule.
 2. τ_{μ}

$H_0: X_t = X_{t-1} + e_t$, Serija je slučajan hod

$H_1: X_t = \phi X_{t-1} + konstanta + e_t, \phi < 1$,
Serija je stacion. oko nenulte srednje vrednosti
 3. τ_t

$H_0: X_t = b + X_{t-1} + e_t$
Serija je slučajan hod sa konstantnim prirastom

$H_1: X_t = \phi X_{t-1} + konstanta + trend + e_t, \phi < 1$,
Serija je trend-stacionarna

6

6

τ_μ statistika

Pretpostavka: $E(X_t) = \mu = \text{const.}$

$$(X_t - \mu) = \phi(X_{t-1} - \mu) + e_t$$

$$X_t = \underbrace{\mu(1 - \phi)}_{\beta_0} + \phi X_{t-1} + e_t$$

$$X_t = \beta_0 + \phi X_{t-1} + e_t$$

$$\phi = 1 \Rightarrow X_t = X_{t-1} + e_t$$

X_t je slučajan hod

$\phi < 1 \Rightarrow X_t$ je stacionarna oko
nenulte srednje vrednosti

7

7

τ_t statistika

Pretpostavka: $E(X_t) = \mu + bt, b > 0$

$$(X_t - E(X_t)) = \phi(X_{t-1} - E(X_{t-1})) + e_t$$

$$(X_t - \mu - bt) = \phi(X_{t-1} - \mu - b(t-1)) + e_t$$

$$X_t = \underbrace{\mu - \phi\mu + \phi b}_{\beta_0} + \underbrace{b(1 - \phi)}_{\beta} t + \phi X_{t-1} + e_t$$

$$X_t = \beta_0 + \beta t + \phi X_{t-1} + e_t$$

$$\phi = 1 \Rightarrow$$

$$X_t = b + X_{t-1} + e_t$$

X_t je slučajan hod sa konst. prirastom

$$\phi < 1 \Rightarrow$$

X_t je trend–stacionarna v.serija

8

8

Kako se dolazi do vrednosti DF test statistika za različite determinističke komponente?

Varijante DF testa	Odgovarajući model (podsećanje: $\varphi = \phi - 1$)
τ	$\Delta X_t = \varphi X_{t-1} + e_t$
τ_μ	$\Delta X_t = \varphi X_{t-1} + \beta_0 + e_t$
τ_t	$\Delta X_t = \varphi X_{t-1} + \beta_0 + \beta t + e_t$

9

9

Računanje DF statistike

- Primenom metoda ONK ocenjen je model:

$$\Delta \hat{X}_t = \hat{\varphi} X_{t-1} + \hat{\beta}_0 + \hat{\beta} t$$

$$s(\hat{\varphi})$$

- **DF test-statistika je količnik ocene parametra φ i odgovarajuće standardne greške te ocene:**

$$DF = \tau_t = \frac{\hat{\varphi}}{s(\hat{\varphi})}$$

10

10

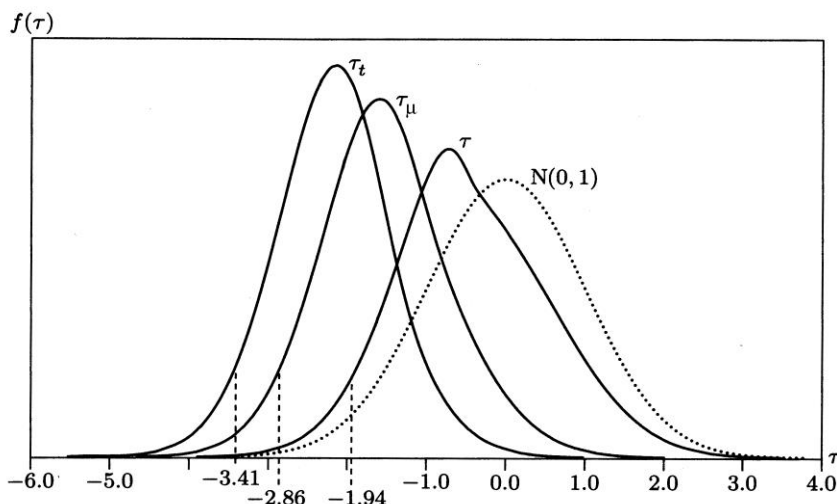
Računanje DF statistike II

- DF test statistika **ima formu standardnog t -odnosa.**
- DF test statistika **nema t -raspodelu** u uslovima istinitosti nulte hipoteze.
 - Ocena parametra φ nema normalnu raspodelu.
- DF test statistika poseduje nestandardnu raspodelu, koju su odredili Dickey i Fuller.
- Kritične vrednosti: Fuller (1976) i MacKinnon (1991).

11

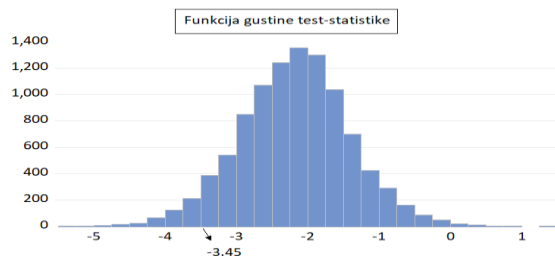
11

Funkcije gustine tri varijante DF test-statistika za uzorak velikog obima



12

Pravilo odlučivanja (slika se odnosi na uzorak 100 i τ_t)



- Nulta hipoteza o postojanju jediničnog korena se **odbacuje** za dovoljno malu vrednost statistike (*kada je izračunata vrednost manja od kritične*).
- Nulta hipoteza o postojanju jediničnog korena se **ne odbacuje** za dovoljno veliku vrednost statistike (*kada je izračunata vrednost veća od kritične*).

13

13

**Određivanje kritičnih vrednosti
za konkretnu dužinu (T) vremenske serije
uz nivo značajnosti 5%**

$$\tau^k = -1.9393 - \frac{0.398}{T}$$

$$\tau_\mu^k = -2.8621 - \frac{2.738}{T} - \frac{8.36}{T^2}$$

$$\tau_t^k = -3.4126 - \frac{4.039}{T} - \frac{17.83}{T^2}$$

14

14

Određivanje broja jediničnih korena

- Ako je H_0 prihvaćeno kao tačno, onda se zaključuje da je serija integrisana bar prvog reda, $X_t \sim I(1)$.
- Međutim, potrebno je utvrditi da li je broj jediničnih korena tačno jedan ili eventualno dva.
- Nastavljamo testiranje:

$$H_0: X_t \sim I(2) \text{ protiv } H_1: X_t \sim I(1)$$

$$H_0: \Delta X_t \sim I(1) \text{ protiv } H_1: \Delta X_t \sim I(0).$$

- Sada je polazna serija u analizi ΔX_t .

15

15

Određivanje broja jediničnih korena II

$$H_0: X_t \sim I(2) \text{ protiv } H_1: X_t \sim I(1)$$

$$H_0: \Delta X_t \sim I(1) \text{ protiv } H_1: \Delta X_t \sim I(0).$$

- Relevantna specifikacija:

$$\Delta X_t = \phi \Delta X_{t-1} + \beta_0 + \beta t + e_t / - \Delta X_{t-1}$$

$$\Delta \Delta X_t = \phi \Delta X_{t-1} + \beta_0 + \beta t + e_t, \phi - 1 = \varphi$$

$$\Delta^2 X_t = \varphi \Delta X_{t-1} + \beta_0 + \beta t + e_t$$

- **Ocenjujemo $\Delta^2 X_t$ u zavisnosti od ΔX_{t-1} , konstante i trenda.**
- **Proveravamo da li je t -odnos za ocenu uz ΔX_{t-1} veći ili manji od odgovarajuće kritične vrednosti DF testa.**

16

16

Određivanje broja jediničnih korena III

$$H_0: X_t \sim I(2) \quad \text{protiv} \quad H_1: X_t \sim I(1)$$

$$H_0: \Delta X_t \sim I(1) \quad \text{protiv} \quad H_1: \Delta X_t \sim I(0).$$

- Ako je H_0 odbačeno, onda se zaključuje da je serija $X_t \sim I(1)$, odnosno da poseduje tačno jedan jedinični koren.
- Ako H_0 ne odbacujemo, tada se zaključuje da je serija integrisana bar drugog reda, $X_t \sim I(2)$.
 - Potrebno je utvrditi da li je broj jediničnih korena tačno dva ili eventualno tri.
 - Nastavljamo testiranje...

17

17

Prošireni DF test: uvod

- Ako AR(1) model ne opisuje na adekvatan način datu vremensku seriju, tada postoji autokorelacija.
- Ključna negativna posledica autokorelacije u KLRM: netačne standardne greške ocena parametara
- Kvalitet DF statistike uz prisustvo autokorelacije
 - Loš!!!
 - Netačan je imenilac DF statistike
 - Testiranje je nepouzđano.

19

19

Prošireni DF test Augmented DF test, ADF(K)

$$\Delta X_t = \beta_0 + \beta t + \varphi X_{t-1} + \delta_1 \Delta X_{t-1} + \delta_2 \Delta X_{t-2} + \dots + \delta_K \Delta X_{t-K} + e_t$$

- ADF test je količnik ocene parametra φ i odgovarajuće standardne greške ocene.
- ADF i DF imaju istu graničnu raspodelu: koristimo identične kritične vrednosti.

20

20

Prošireni DF test II

$$\Delta X_t = \beta_0 + \beta t + \varphi X_{t-1} + \delta_1 \Delta X_{t-1} + \delta_2 \Delta X_{t-2} + \dots + \delta_K \Delta X_{t-K} + e_t$$

- Modelu za određivanje ADF(K) statistike odgovara AR(K+1) specifikacija.
 - AR(2) model, ADF(1) test
 - AR(3) model, ADF(2) test
 - Itd.

21

21

Prošireni DF test Augmented DF test, ADF(K) III

- $\Delta X_t = \beta_0 + \beta t + \phi X_{t-1} + \delta_1 \Delta X_{t-1} + \delta_2 \Delta X_{t-2} + \dots + \delta_K \Delta X_{t-K} + e_t$
- Parametar K može se odrediti na više načina:
 - Metod od posebnog ka opštem
 - Metod od opšteg ka posebnom
 - Informacioni kriterijumi.

23

23

Informacioni kriterijum

- Definicija u kontekstu izbora K :

$$IC(K) = \ln[s^2(K)] + g \frac{(K+3)}{T}$$

- g nenegativna rastuća funkcija (kaznena)
- $s^2(K)$ je ocena varijanse slučajne greške modela.
- **Cilj je da se izabere takvo K kojim se minimizira vrednost IC**

24

24

Vrste informacionih kriterijuma

Funkcija g	Kaznena komponenta	Naziv	Oznaka
2	$2(K+3)/T$	Akaike	AIC
$\ln T$	$(\ln T)(K+3)/T$	Schwarz	SC ili SIC
$2\ln \ln T$	$(2\ln \ln T)(K+3)/T$	Hannan-Quinn	HQC ili HQIC

25

25

Odnos između informacionih kriterijuma: SC se smatra najpouzdanijim

$$T \geq 8, \ln T > 2 \Rightarrow SC > AIC$$

$$T \geq 16, 2\ln \ln T > 2 \Rightarrow HQ > AIC$$

$$T \geq 16, SC > HQ > AIC$$

Napomena

$$\ln 8 = 2.08$$

$$\ln 16 = 2.77$$

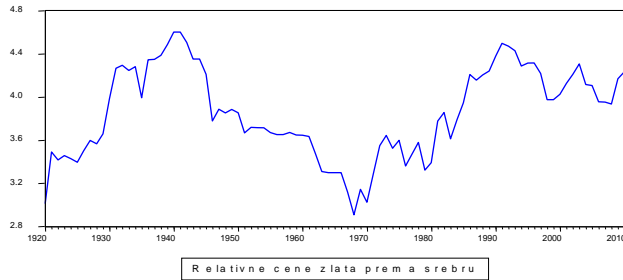
$$2\ln \ln 16 = 2.04$$

26

26

Primer I: Odnos cene zlata prema ceni srebra

- Period: 1920 – 2010. godina
- (91 podatak na godišnjem nivou, log vrednosti)



27

27

Primer I: primena DF testa

Dati su rezultati:

$$\hat{X}_t = 0.349 + 0.913X_{t-1}$$

(0.038)

$$\Delta\hat{X}_t = 0.008 + 0.034\Delta X_{t-1}$$

(0.101)

I korak

$$H_0: X_t \sim I(1)$$

$$H_1: X_t \sim I(0)$$

$$DF = \frac{0.913 - 1}{0.038} = -2.29 \left. \vphantom{DF} \right\} \Rightarrow \begin{cases} -2.29 > -2.89 \\ \text{Hipoteza } H_0 \text{ se ne odbacuje.} \\ \text{Serija poseduje bar jedan jed.koren.} \end{cases}$$

$$\tau_{\mu}^k = -2.89 \quad (\alpha = 0.05)$$

28

28

Primer I: primena DF testa (nastavak)

Dati su rezultati:

$$\hat{X}_t = 0.349 + 0.913X_{t-1}$$

(0.038)

$$\Delta\hat{X}_t = 0.008 + 0.034\Delta X_{t-1}$$

(0.101)

II korak

$$H_0: X_t \sim I(2) \Leftrightarrow \Delta X \sim I(1)$$

$$H_1: X_t \sim I(1) \Leftrightarrow \Delta X \sim I(0)$$

$$DF = \frac{0.034 - 1}{0.101} = -9.56 \left. \vphantom{DF} \right\} \Rightarrow \begin{cases} -9.56 < -2.89 \\ \text{Hipoteza } H_0 \text{ se odbacuje.} \\ \text{Serija poseduje precizno jedan jed.koren.} \end{cases}$$

$\tau_\mu^k = -2.89 \ (\alpha = 0.05)$

29

29

Primer I: primena DF testa u modifikovanom modelu

Prvobitno su dati rezultati:

$$\hat{X}_t = 0.349 + 0.913X_{t-1}$$

(0.038)

$$\Delta\hat{X}_t = 0.008 + 0.034\Delta X_{t-1}$$

(0.101)

Sada su dati rezultati prema modifikovanom modelu (oduzima se X_{t-1} od obe strane jednakosti):

$$\widehat{\Delta X}_t = 0.349 - 0.087 X_{t-1}$$

(0.038)

$$\widehat{\Delta^2 X}_t = 0.008 - 0.966 \Delta X_{t-1}$$

(0.101)

30

30

Primer I: primena DF testa u
modifikovanom modelu (nastavak)

$$\widehat{\Delta X}_t = 0.349 - 0.087 X_{t-1} \\ (0.038)$$

$$\widehat{\Delta^2 X}_t = 0.008 - 0.966 \Delta X_{t-1} \\ (0.101)$$

I korak

$$H_0: X_t \sim I(1)$$

$$H_1: X_t \sim I(0)$$

$$\left. \begin{aligned} DF = -\frac{0.087}{0.038} = -2.29 \\ \tau_{\mu}^k = -2.89 (\alpha = 0.05) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} -2.29 > -2.89 \\ \text{Hipoteza } H_0 \text{ se ne odbacuje.} \\ \text{Serija poseduje bar jedan jed.koren.} \end{cases}$$

31

31

Primer I: primena DF testa (nastavak)

$$\widehat{\Delta X}_t = 0.349 - 0.087 X_{t-1} \\ (0.038)$$

$$\widehat{\Delta^2 X}_t = 0.008 - 0.966 \Delta X_{t-1} \\ (0.101)$$

II korak

$$H_0: X_t \sim I(2) \Leftrightarrow \Delta X \sim I(1)$$

$$H_1: X_t \sim I(1) \Leftrightarrow \Delta X \sim I(0)$$

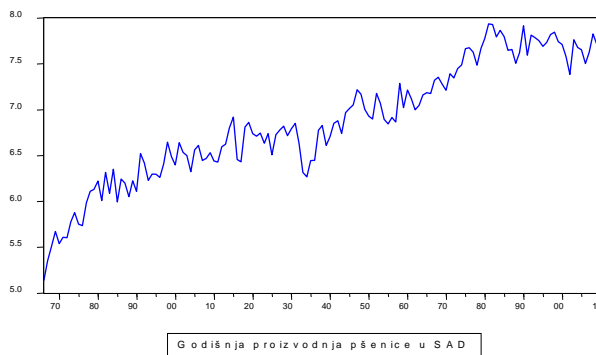
$$\left. \begin{aligned} DF = -\frac{0.966}{0.101} = -9.56 \\ \tau_{\mu}^k = -2.89 (\alpha = 0.05) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} -9.56 < -2.89 \\ \text{Hipoteza } H_0 \text{ se odbacuje.} \\ \text{Serija poseduje tačno jedan jed.koren.} \end{cases}$$

32

32

Primer II: Godišnja proizvodnja pšenice u SAD-u

- Period: 1866 – 2011. godina
- (146 godišnjih opservacija, log vrednosti)



33

33

Primer II: Primena ADF testa

$$\hat{X}_t = 1.835 + 0.004t + 0.691X_{t-1} - 0.152\Delta X_{t-1},$$

(0.067) (0.081)

$$H_0: X_t \sim I(1)$$

$$H_1: X_t \sim I(0)$$

$$ADF(1) = \frac{0.691 - 1}{0.067} = -4.61 \quad \left. \vphantom{ADF(1)} \right\} \Rightarrow \begin{cases} -4.61 < -3.44 \\ \text{Hipoteza } H_0 \text{ se odbacuje.} \\ \text{Serija je trend-stacionarna.} \end{cases}$$

$\tau_t^k = -3.44 \quad (\alpha = 0.05)$

Korektivni faktor ΔX_{t-1} je statistički značajan za 10% značajnosti.

$$t = -\frac{0.152}{0.081} = -1.88$$

III

$$\Delta \hat{X}_t = 1.835 + 0.004t - 0.309X_{t-1} - 0.152\Delta X_{t-1}, ADF(1) = -4.61$$

(0.067) (0.081)

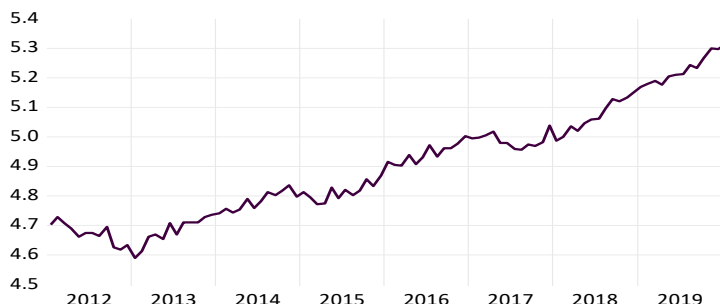
34

34

Primer III: Mesečni podaci o gotovom novcu u Srbiji

Period: 2012:1-2020:1, vežba3.wf1
 97 mesečnih desezoniranih podataka, log vrednosti

Gotov novac u opticaju (log vrednosti u milionima dinara, desezonirano)



35

Primer III: Primena ADF testa

I faza: Provera prisustva bar jednog jediničnog korena	II faza: Provera prisustva bar dva jedinična korena
$H_0: X_t \sim I(1)$ $H_1: X_t \sim I(0)$	$H_0: \Delta X_t \sim I(1)$ $H_1: \Delta X_t \sim I(0)$
$ADF(3) = -2.64,$ $\tau_t^k = -3.46$	$ADF(2) = -4.84$ $-4.84 < -3.46$
$-2.64 > -3.46$	
H_0 se ne odbacuje.	H_0 se odbacuje.
Serija ima bar jedan jedinični koren.	Prva diferencna serije je stacionarna. Polazna serija ima tačno jedan jedinični koren.

36

Osnovno ograničenje ADF testa

- Ako je serija stacionarna sa autoregresionim parametrom koji je blizak vrednosti 1, onda se primenom ADF testa u najvećem broju slučajeva dobija rezultat da postoji jedinični koren.
- Testom ne može da se diskriminiše da li je $\phi=1$ ili $\phi=0.95$, posebno na uzrocima malog obima.
- Ako je serija generisana kao
$$X_t = 0.95X_{t-1} + e_t$$
onda bi testom morala da se odbaci nulta hipoteza o prisustvu jediničnog korena.
- Jedan od načina da se prevaziđe dati problem jeste da se nulta hipoteza definiše kao tvrđenje o stacionarnosti.

37

37

Nulta hipoteza o stacionarnosti

- Alternativna postavka hipoteza
$$H_0: X_t \text{ je stacionarna vremenska serija}$$
$$H_1: X_t \text{ poseduje jedinični koren}$$
- KPSS test
- Kwiatkowski, Phillips, Schmidt and Shin, 1992.
- Paralelna upotreba ADF i KPSS testa povećava pouzdanost statističkog zaključivanja.

38

38

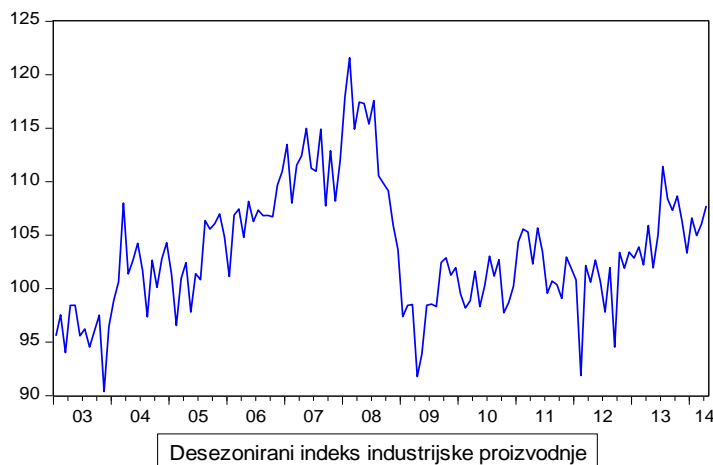
Dodatna ograničenja ADF testa

- Test je osetljiv na postojanje strukturnog loma
- Trajan strukturni lom u trendu stacionarne vremenske serije: primena ADF testa sugerise postojanje jediničnog korena.
- Jednokratni strukturni lom u prvoj diferencijalnoj seriji sa jediničnim korenom: primena ADF testa sugerise stacionarnost polazne serije.

39

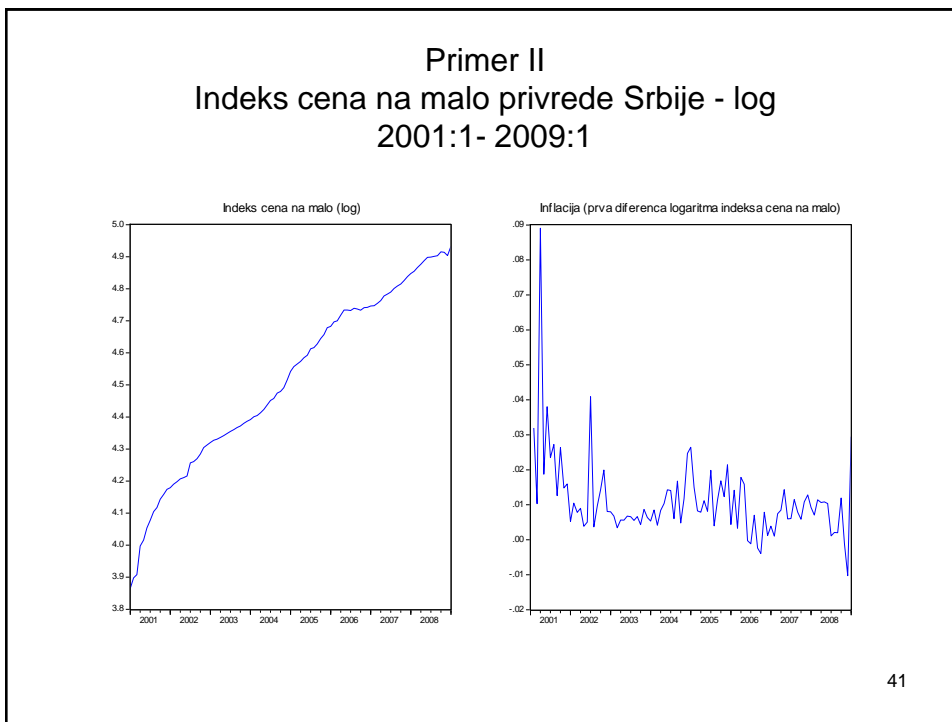
39

Primer I
Desezonirani indeks industrijske proizvodnje u Srbiji
2003:1 – 2014:4



40

40



41

**Ocena međuzavisnosti između
v. serija sa jediničnim korenom**

- Najveći broj ekonomskih vremenskih serija poseduje jedinični koren.
- Direktno ocenjivanje međuzavisnosti između v. serija sa jediničnim korenom primenom metoda ONK daje nepouzdan rezultate
 - Besmislena regresija.
 - Ocene dobijene metodom ONK su pristrasne i nekonzistentne.
 - Ocene dobijene metodom ONK nisu normalno raspodeljene.

42

42

Kako prevazići problem?

- Transformišemo vremenske serije u stacionarne i ocenjujemo zavisnosti prvih diferenci.
- Problem: gde su nam ocene dugoročnih ravnotežnih veza?
- Dugoročne ravnotežne veze odražavaju sistemske odnose u ekonomiji. Njihova analiza je bitna.

43

Rešenje problema: *kointegracija* (engl. co-integration)

- Rezultat vredan Nobelove nagrade za ekonomiju koja je dodeljena Granger-u 2003. godine.
- Prihvatljiva definicija: individualno *nestacionarne* vremenske serije su kointegrisane ako obrazuju *stacionarnu* linearnu kombinaciju.
- Kointegrisanost proizilazi iz ekonomskih odnosa
 - dugoročna ravnotežna veza
 - skup egzogenih i endogenih promenljivih
- Fundamentalni okvir modeliranja međuzavisnosti ekonomskih veličina

44

Rezime osnovnih koraka u ekonometrijskom modeliranju vremenskih serija

- Test jediničnog korena
 - Ako su serije stacionarne, tada se modeliranje ostvaruje prema principima klasičnog linearnog regresionog modela.
 - Ako serije poseduju jedinični koren, tada se proverava postojanje kointegracije.
- Test kointegracije
 - Ako postoji kointegracija, tada se ocenjuje posebna specifikacija i determiniše endogenost i egzogenost.
 - Ako kointegracija ne postoji, tada se
 - Ocenjuje model prvih diferenci.
 - Redefiniše skup promenljivih.