Analiza vremenskih serija: osnove nestacionarnosti

Zorica Mladenović

1

1

Struktura

- Modeliranje komponente trenda: trend-stacionarna i diferencno-stacionarna klasa modela
- Detaljnije o diferencno-stacionarnoj klasi modela
- Zašto je važno napraviti razliku između dve klase modela?
- ARIMA modeli
- Testovi jediničnog korena

2

2

Trend-stacionarna klasa modela

- Vremenska serija je zbir determinističke funkcije trenda i stacionarne komponente.
- Koristi se za opisivanje vremenskih serija koje su stacionarne, ali oko putanje najčešće linearnog trenda.
- Deterministički proces

3

3

Trend-stacionarna klasa modela II

$$X_t = \beta_0 + \beta_1 t + e_t, \; \mathrm{t} = 1,2,...$$

$$\mathrm{E}(e_t) = 0, \; \mathrm{var}(e_t) = \sigma^2, \; \mathrm{cov}(e_t, e_{t-k}) = 0$$
$$\Rightarrow \; \mathrm{E}(e_t e_{t-k}) = 0, \; \mathrm{k} \neq 0.$$

$$\mathrm{E}(X_t) = \beta_0 + \beta_1 t$$

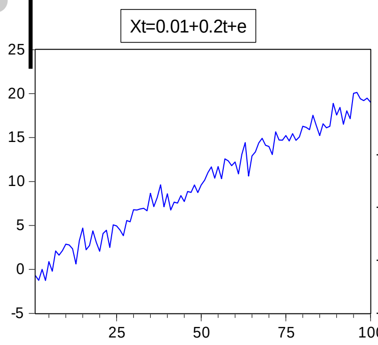
$$\mathrm{var}(X_t) = \mathrm{var}(e_t) = \sigma^2, \qquad \mathrm{t} = 1,2,...$$

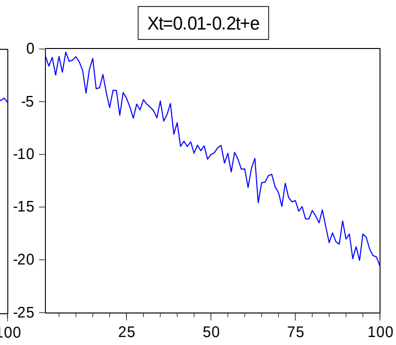
$$\begin{aligned}\mathrm{cov}(X_t, X_{t-k}) &= E\big(\mathrm{X_t} - E(X_t)\big)\big(\mathrm{X_{t-k}} - E(X_{t-k})\big) \\ &= E\,\underbrace{(\mathrm{X_t} - \beta_0 - \beta_1 t)}_{e_t}\underbrace{\big(\mathrm{X_{t-k}} - \beta_0 - \beta_1 (t-k)\big)}_{e_{t-k}} \\ &= 0, \mathrm{t} = 1,2,..., \mathrm{k} = 1,2,...\end{aligned}$$

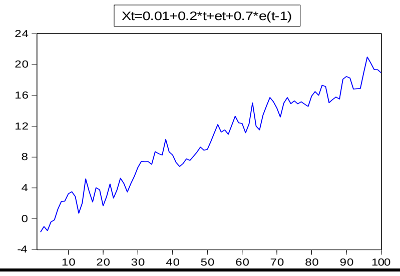
4

4

Trend-stacionarna klasa modela III





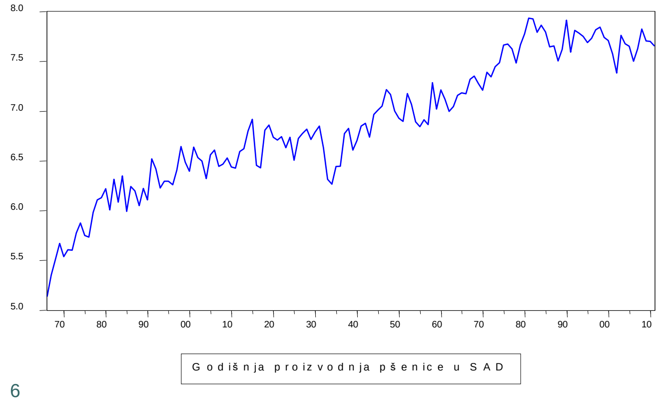


5

5

Trend-stacionarna klasa modela IV: primer iz praktične analize

- Period: 1866 – 2011. godina (146 godišnjih opservacija, log vrednosti)



6

6

Diferencno-stacionarna klasa modela

$\Delta X_t = \beta + e_t$ ili $X_t = \beta + X_{t-1} + e_t$,
$\mathrm{E}(e_t) = 0$, $\mathrm{var}(e_t) = \sigma^2$, $\mathrm{E}(e_t e_{t-k}) = 0$, $\mathrm{k} \neq 0$.

$\beta > 0$, konstantni prirast

$$X_t = \beta + \underbrace{X_{t-1}}_{\beta + X_{t-2} + e_{t-1}} + e_t$$

$$X_t = 2\beta + e_t + e_{t-1} + X_{t-2} = \ldots = \beta t + \underbrace{e_t + e_{t-1} + \ldots + e_1}_{\mathrm{t}} + X_0$$

$$X_t = X_0 + \beta t + e_t + e_{t-1} + \ldots + e_1$$

$t = 1, X_1 = X_0 + \beta + e_1$,
$t = 2, X_2 = X_0 + 2\beta + e_2 + e_1$, itd.

Deterministička komponenta svakog narednog člana vremenske serije se uvećava za vrednost β

7

7

Diferencno-stacionarna klasa modela II

$\mathrm{E}(X_t) = X_0 + \beta t$
$\mathrm{var}(X_t) = \mathrm{var}(X_0 + \beta t + e_t + e_{t-1} + \ldots + e_1) = t\sigma^2$.

Primenom operatora prve diference eliminiše se nestacionarnost:

$\Delta X_t = \beta + e_t$, $\mathrm{E}(\Delta X_t) = \beta$, $\mathrm{var}(\Delta X_t) = \mathrm{var}(e_t) = \sigma^2$.

8

8

Diferencno-stacionarna klasa modela III

$$X_t = X_0 + \beta t + e_t + e_{t-1} + \ldots + e_1$$
$$X_{t-k} = X_0 + \beta (t-k) + e_{t-k} + e_{t-k-1} + \ldots + e_1$$

- $\mathrm{cov}(X_t, X_{t-k}) = E\big(X_t - E(X_t)\big)\big(X_{t-k} - E(X_{t-k})\big)$
  $= E(e_t + e_{t-1} + \ldots + e_{t-k} + e_{t-k-1} + \ldots + e_1)(e_{t-k} + e_{t-k-1} + \ldots + e_1)$
  $= (t\text{-}k)\sigma^2$
- $\rho = \dfrac{\mathrm{cov}(X_t, X_{t-k})}{\sqrt{\mathrm{var}(X_t)\mathrm{var}(X_{t-k})}} = \dfrac{(t-k)\sigma^2}{\sqrt{t\sigma^2 (t-k)\sigma^2}} = \sqrt{\dfrac{(t-k)^2}{t\,(t-k)}} = \sqrt{1 - \dfrac{k}{t}}$

9

9

Diferencno-stacionarna klasa modela IV

- Varijansa nije stabilna i sa protokom vremena se povećava.
- Kovarijansa svaka dva člana zavisi od trenutka vremena i sa protokom vremena se povećava.
- Obična autokorelaciona funkcija uzima niz nenultih vrednosti koje sporo opadaju počev od vrednosti bliske 1.
- Parcijalna autokorelaciona funkcija poseduje nenultu vrednost samo na prvoj docnji i ta vrednost je bliska 1.
- Model možemo shvatiti kao AR(1) model sa autoregresionim parametrom 1.
-

10

10

Diferencno-stacionarna klasa modela V

- Vremenska serija se transformiše u stacionarnu primenom operatora prve diference.
- Prva diferenca primenjena jednom: $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$
- Prva diferenca primenjena dva puta, druga diferenca:

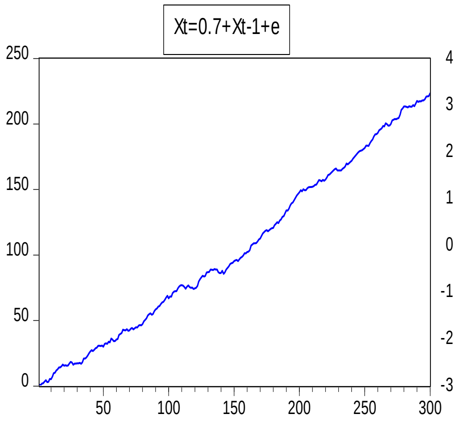
$$\Delta^2 X_t = \Delta\Delta X_t = \Delta X_t - \Delta X_{t-1} = X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}$$

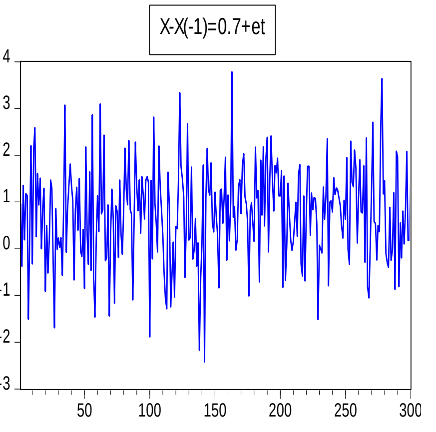
$$X_t = \beta + X_{t-1} + e_t \Rightarrow \underbrace{X_t - X_{t-1}}_{\Delta X_t} = \beta + e_t, \Delta X_t = \beta + e_t$$

11

11

Diferencno-stacionarna klasa modela: grafički prikaz generisanih podataka

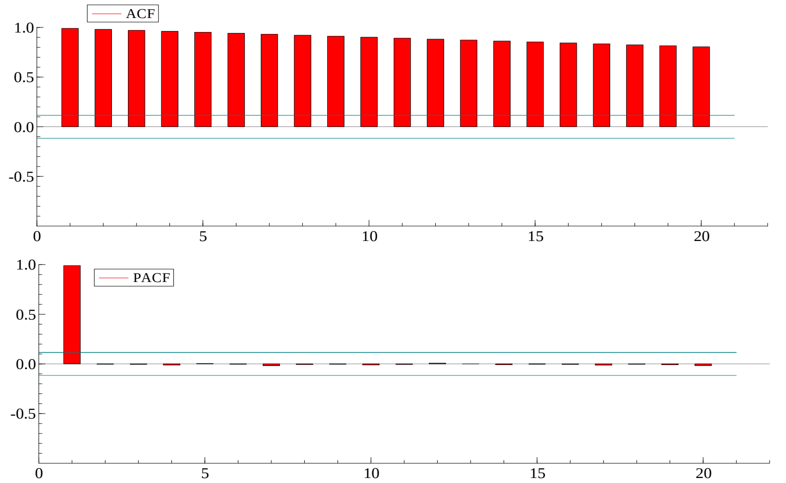




12

12

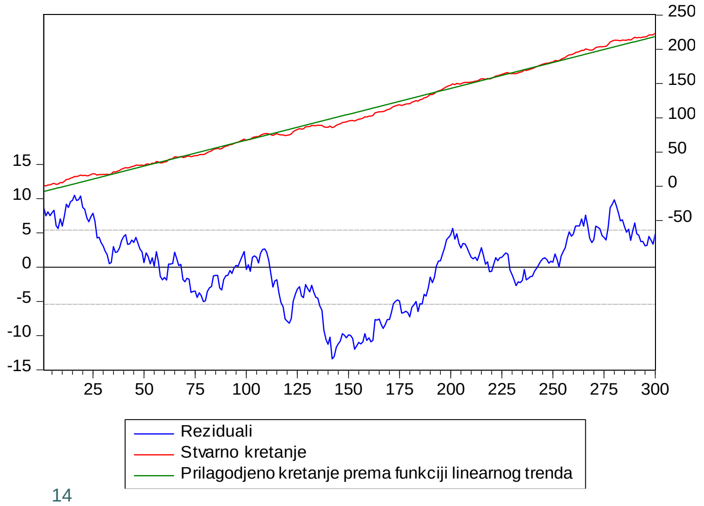
Diferencno-stacionarna klasa modela: obična i parcijalna autokorelaciona funkcija



13 13

13

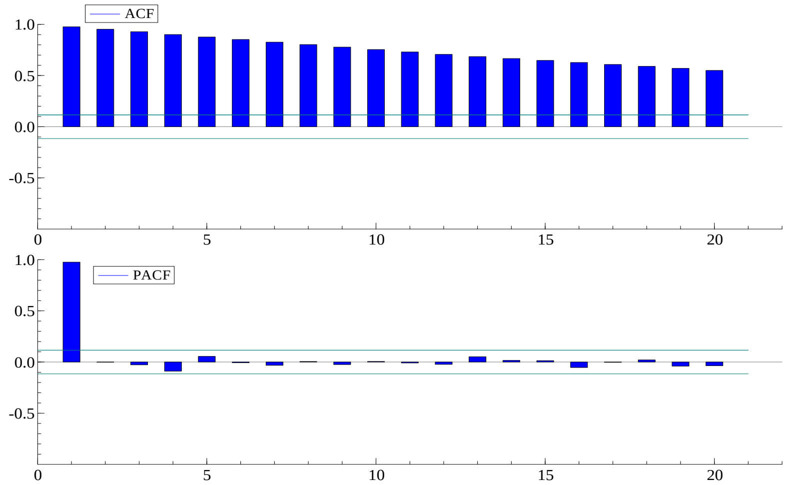
Da li se izdvajanjem funkcije trenda menja statistička priroda vremenske serije diferencno-stacionarne klase modela?



14 14

14

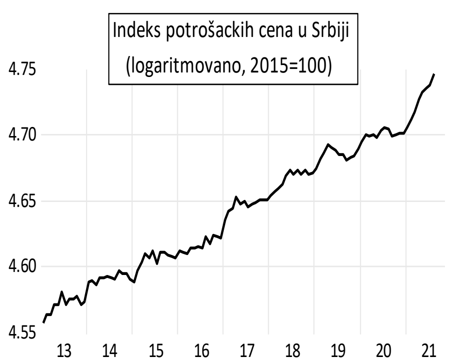
Korelogrami serije reziduala sugerišu njihovu nestacionarnost: izdvajanje komp. trenda nije suštinska transformacija

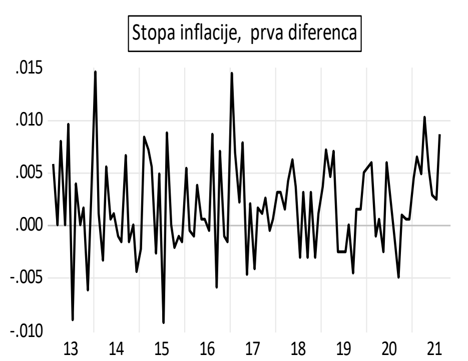


15

15

Primer diferencno-stacionarne klase modela: indeks mesečnih potrošačkih cena privrede Srbije 2013:1 – 2021:8)





16

16

Alternativni termini za diferencno-stacionarnu klasa modela

- Vremenska serija sa stohastičkim trendom
- Integrisano-stacionarna vremenska serija
- Vremenska serija sa jediničnim korenom
- Slučajan hod

17

17

Alternativni termini II

- Vremenska serija sa stohastičkim trendom
  - Na osnovu informacije o prethodnom kretanju vremenske serije ne možemo predvideti njeno kretanje u budućnosti. U suprotnom, kada bi trend bio deterministički, tada bi i prognoza bila pouzdana.

18

18

Alternativni termini III

- Integrisano-stacionarna vremenska serija
  - Vremenska serija dobija se na osnovu zbira članova procesa beli šum.
  - Operaciji sabiranja u diskretnom prostoru odgovara postupak integraljenja neprekidnih veličina.
  - Reč je o integrisanom procesu prvog reda, gde red 1 pokazuje koliko puta treba diferencirati seriju da bi se dobila njena stacionarna reprezentacija.
  - Ako je prva diferenca stacionarna, tada je vremenska serija integrisana reda 1. Oznaka: $X_t \sim I(1)$.
  - Za stacionarnu vremensku seriju kažemo da je integrisana reda 0: $e_t \sim I(0)$.

19

19

Alternativni termini IV

- Vremenska serija sa jediničnim korenom
  - Reč je o AR(1) modelu kod koga je autoregresioni parametar jednak vrednosti 1. Ponašanje na dugi rok određuje rešenje sledeće karakteristične jednačine:

$$X_t - 1 \cdot X_{t-1} = e_t$$
$$g - 1 = 0 \Rightarrow g = 1.$$

  - Koren korespondirajuće karakteristične jednačine uzima vrednost jedan. Otuda potiče naziv jedinični koren.
  - Broj jediničnih korena odgovara nivou integrisanosti v. serije, tj. broju postupaka diferenciranja potrebnih za stacionarnu reprezentaciju v. serije.

20

20

Rezime uvedenih termina

Ako vremenska serija ima ***d*** jediničnih korena, onda je ona integrisana reda ***d***, i treba je diferencirati ***d*** puta da bi se obezbedila njena stacionarna reprezentacija.

$$\mathit{Serija}\ \text{ima}\ d\ \text{jediničnih korena} \Leftrightarrow X_t \sim I(d) \Leftrightarrow \Delta^d X_t \sim I(0)$$

21

21

Kako izgleda vremenska serija sa dva jedinična korena?

$$X_t = 2X_{t-1} - X_{t-2} + e_t$$

$$X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2} = e_t$$

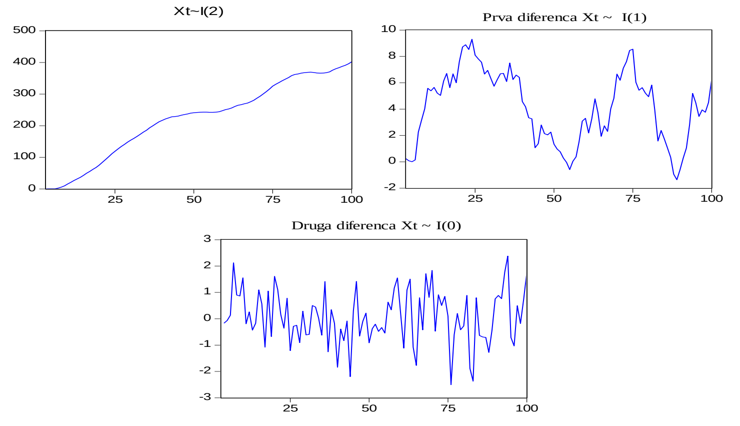
$$g^2 - 2g + 1 = 0 \Leftrightarrow (g-1)^2 = 0 \Rightarrow g_1 = g_2 = 1 \Rightarrow X_t \sim I(2)$$

$$\underbrace{\underbrace{X_t - X_{t-1}}_{\Delta X_t} = \underbrace{X_{t-1} - X_{t-2}}_{\Delta X_{t-1}} + e_t}_{\Delta X_t \sim I(1)} \Rightarrow \underbrace{\underbrace{\underbrace{\Delta X_t = \Delta X_{t-1}}_{\Delta X_t - \Delta X_{t-1} = \Delta^2 X_t} + e_t}_{\Delta^2 X_t = e_t}}_{\Delta^2 X_t \sim I(0)}$$

22

22

Kako izgleda vremenska serija sa dva jedinična korena II?



23

23

Alternativni termini V

- Slučajan hod (engl. random walk):
  - Klasičan slučajan hod
  - Slučajan hod sa konstantnim prirastom

24

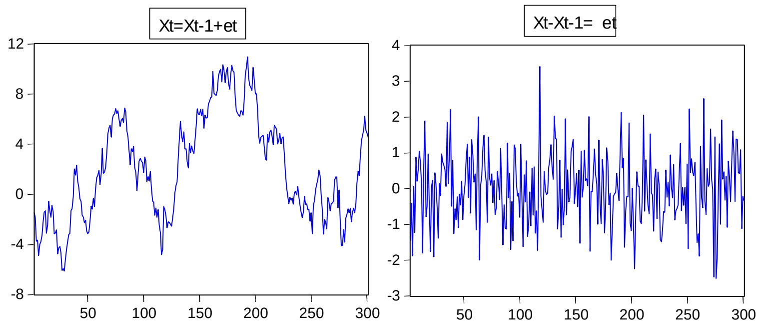
24

Naziv	Forma	$E(\Delta Xt)$
Slučajan hod *klasični*	$X_t = X_{t-1} + e_t$ $X_0 = 0$	0
Slučajan hod *sa konstantnim prirastom*	$X_t = X_{t-1} + \beta + e_t$ $X_0 = 0$	β

25

25

Klasičan slučajan hod: grafički prikaz



27

27

Slučajan hod: prva upotreba termina

- Prepiska Karla Pearson-a i Barona Rayleigh-a (dobio Nobelovu nagradu za fiziku 1904) u časopisu *Nature 1905. godine*
  - Optimalna prognoza pozicije pijanca *t* koraka nakon što smo ga ostavili na polju

28

28

Slučajan hod u ekonomskim analizama: analiza efikasnosti finansijskog tržišta

- Koncept (slabe) efikasnosti finansijskog tržišta: prethodno kretanje stopa prinosa finansijskih instrumenata ne utiče na njihovo buduće kretanje.
- Cene u svakom trenutku inkorporiraju sve faktore na strani ponude i potražnje, pa se menjaju samo sa pojavom nove vesti.
- Koncept efikasnog tržišta čini model slučajnog hoda relevantnim za opisivanje kretanja logaritma cena finansijskih instrumenata.

$$\ln P_t = \ln P_{t-1} + e_t \Rightarrow \ln P_t - \ln P_{t-1} = \Delta \ln P_t = e_t$$

- Ukoliko logaritam cena prati putanju slučajnog hoda, tada je odgovarajuća stopa prinosa (prva diferenca logaritma datih cena) beli šum.
- Do promene cena dolazi slučajno, i to isključivo kao rezultat nove informacije.

29

29

Zašto je važno napraviti razliku između dve klase modela?

- Postoje dva osnovna razloga koji čine relevantnom podelu na stacionarne i nestacionarne veličine
  - Statistički
  - Ekonomski

30

30

Statistički razlozi

Regresiona analiza nestacionarnih vremenskih serija:

$$Y_t = \beta_0 + \beta X_t + e_t,$$

$$Y_t \sim I(1), X_t \sim I(1)$$

31

31

Statistički razlozi II

- Primena standardne statističke procedure (zasnovana na metodu ONK) ***nepouzdana*** je u regresionoj analizi vremenskih serija sa jediničnim korenom.

- Ocene parametara regresionog modela

1. ***su pristrasne i nekonzistentne***
2. ***nemaju normalnu raspodelu*:**
   - Statističko zaključivanje zasnovano na t-odnosu i F-testu značajnosti koeficijenta determinacije nije tačno**.**

32

32

Statistički razlozi III

- Moguća je pojava ***besmislene regresije*** (lažne korelacije).
- Ovim pojmom označava se regresija sa visokim vrednostima koeficijenta determinacije i t-odnosa (po modulu) između vremenskih serija sa jediničnim korenom, ali koje su potpuno nezavisne.

33

33

Značajna istraživanja o besmislenoj regresiji

- Yule (1926)
  - Empirijska analiza; Udeo broja brakova sklopljenih u Engleskoj crkvi u odnosu na ukupan broj i mortalitet na 1000 osoba prema godišnjim podacima Engleske i Velsa u periodu: 1866-1911. (R2=**0.91**)
- Granger and Newbold (1974)
  - Simulaciona analiza
- Hendry (1980)
  - Empirijska analiza, Inflacija i kumulisana količina padavina u V. Britaniji prema kvartalnim podacima u periodu: 1964-1975. (R2=**0.99**)
- Phillips (1986)
  - TEORIJSKI DOKAZI

34

Jednostavan program za simulacije
(broj ponavljanja 1000, obim uzorka 150, cilj: analiza vrednosti koef. determinacije)

```
workfile besmislena_reg  u 1000
series r2

!nreps=1000
!nobs=150
for !repc=1 to !nreps

smpl @first @first
series y1=0
series x1=0

smpl @first+1 !nobs+20
'Dva nekorelisana bela šuma‘
series ay=nrnd
series ax =nrnd
```

```
'Dva nekorelisana slučajna hoda'
series y1=0.2+y1(-1)+ay
series x1=0.1+x1(-1)+ax

smpl @first+20 !nobs+20
equation eq1.ls y1 c x1

'Koeficijent determinacije R2’
r2(!repc)=@r2

next
smpl @first !nreps
```

35

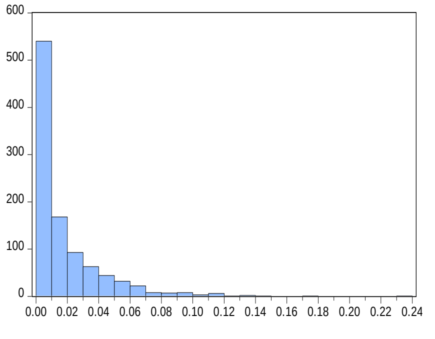
Prosečna vrednost koef. determinacije u nekim od simulacija

Simulacija	Tip serija	Prosečan koef.det.
1.	Dve nekorelisane stacionarne vremenske serije $X_t=0.6*X_{t-1}+ax_t$, $Y_t=0.7*Y_{t-1}+ay_t$	0.02
2.	Dve korelisane stacionarne vremenske serije $X_t=0.6*X_{t-1}+ax_t$, $Y_t=1+X_t+ay_t$	0.60
3.	Dva nekorelisana slučajna hoda $X_t=X_{t-1}+ax_t$, $Y_t=Y_{t-1}+ay_t$	0.23
4.	Dva nekorelisana slučajna hoda sa konst. prirastom $X_t=0.1+X_{t-1}+ax_t$, $Y_t=0.2+Y_{t-1}+ay_t$	0.49
4a.	Dva nekorelisana slučajna hoda sa konst. prirastom $X_t=0.5+X_{t-1}+ax_t$, $Y_t=0.2+Y_{t-1}+ay_t$	0.80

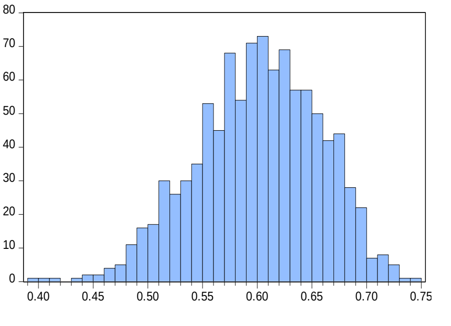
36

Simulacije 1. i 2. Histogrami koeficijenata determinacije

Simulacija 1.



Simulacija 2.

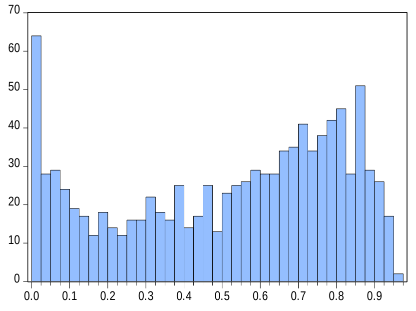


37

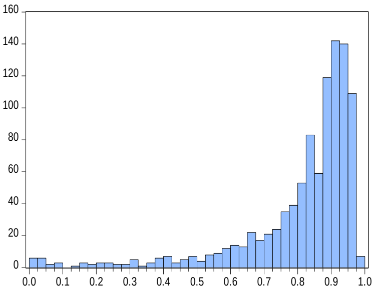
37

Simulacije 4. i 4a. Histogrami koeficijenta determinacije

Simulacija 4.



Simulacija 4a.



38

38

Ekonomski razlozi

- Razlika između vremenske serija sa i bez jediničnog korena ima jasnu ekonomsku implikaciju:
  - Uticaj slučajnih šokova na nivo stacionarne vremenske serije slabi tokom vremena (AR(1), $|\phi_1|<1$)

    $$X_t = e_t + \phi_1 e_{t-1} + \phi_1^2 e_{t-2} + \phi_1^3 e_{t-3} + \ldots$$

  - Efekat šoka na nivo vremenske serije sa jediničnim korenom ima trajno dejstvo za neodređeni period vremena.

    $$X_t = e_t + e_{t-1} + e_{t-2} + e_{t-3} + \cdots + e_1$$

39

39

Ekonomski razlozi II

- Ova razlika posebno dolazi do izražaja u teoriji poslovnih ciklusa:
  - Tradicionalna teorija: BDP ispoljava tendenciju rasta na dugi rok, dok su ciklična odstupanja u fazama recesije i prosperiteta neizbežna (BDP je trend-stacionarna vremenska serija).
  - Ako vremenska serija BDP sadrži jedinični koren, tada njeno odstupanje od dugoročnog trenda neće biti povremeno, kako naglašava tradicionalna teorija, već permanentno za neodređeni period vremena.
- Prisustvo jediničnog korena sugeriše da negativni šokovi iz faze recesije mogu trajno redukovati nivo BDP.

40

40

Ekonomski razlozi: pionirski rad

- Nelson and Plosser(1982), *Journal of Monetary Economics*
  - Jedan od prvih radova provere postojanja jediničnih korena u makroekonomskim veličinama
  - Realni i nominalni BDP privrede SAD poseduju jedinični koren
  - Ukupno je posmatrano 14 vremenskih serija i u većini je detektovano prisustvo jediničnog korena
  - Godišnji podaci u periodu: 1860(1909) – 1970.

41

41

Opšta forma: Autoregresioni modeli pokretnih proseka za integrisane vremenske serije, ARIMA(p,d,q)

$$\Delta^d X_t = \phi_1 \Delta^d X_{t-1} + \phi_2 \Delta^d X_{t-2} + \ldots + \phi_p \Delta^d X_{t-p}$$
$$+ e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2} - \theta_q e_{t-q}$$

- *p* red autoregresione komponente
- *d* nivo integrisanosti vremenske serije i
- *q* red komponente pokretnih proseka.

42

42

ARIMA(p,d,q) model: primeri

$ARIMA(p,1,q):$

$$\Delta X_t = \phi_1 \Delta X_{t-1} + \phi_2 \Delta X_{t-2} + \ldots + \phi_p \Delta X_{t-p} + e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2} - \theta_q e_{t-q}$$

$ARIMA(p,2,q):$

$$\Delta^2 X_t = \phi_1 \Delta^2 X_{t-1} + \phi_2 \Delta^2 X_{t-2} + \ldots + \phi_p \Delta^2 X_{t-p} + e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2} - \theta_q e_{t-q}$$

AR(p)	**MA(q)**	**ARMA(p,q)**	**Beli šum**	**Slučajan hod**
ARIMA(p,0,0)	ARIMA(0,0,q)	ARIMA(p,0,q)	ARIMA(0,0,0)	ARIMA(0,1,0)

43

43

ARIMA(p,d,q) model: konkretni primeri

Model	Zapis
$(1-L)X_t = 0.4 + (1+0.3L+0.1L^2)e_t$	ARIMA(0,1,2)
$\Delta X_t = 0.5\Delta X_{t-1} + e_t$	ARIMA(1,1,0)
$X_t = 2X_{t-1} - X_{t-2} + e_t$	ARIMA(0,2,0)
$(1+0.2L-0.5L^2)(1-L)^2 X_t = (1-0.7L)e_t$	ARIMA(2,2,1)
$(1-0.1L-0.3L^2-0.2L^3)X_t = e_t$	ARIMA(3,0,0)

44

44

Boks-Dženkinsova strategija modeliranja i ARIMA(p,d,q) modeli

- To su suštinski modeli od kojih se polazi
- U odnosu na ARMA(p,q) modele modifikuje se prva faza identifikacije modela.
- Potrebno je identifikovati **d**, a ne samo **p** i **q**.
- Metodološki okvir određivanja nivoa integrisanosti, odnosno broja jediničnih korena (**d**):
  - Obična i parcijalna autokorelaciona funkcija polazne serije
  - Testovi jediničnog korena

45

45