Modeli stacionarnih vremenskih serija

Zorica Mladenović

1

1

Modeli stacionarnih vremenskih serija

- Linearni proces
- Osnovni modeli: postavka
- Obična i parcijalna autokorelaciona funkcija u osnovnim modelima
- Primeri

2

2

Linearni proces

- Fundamentalna teorema analize stacionarnih vremenskih serija: *Wold-ova teorema razlaganja*

- **Wold-ova teorema razlaganja**
  - Svaka slabo stacionarna vremenska serija može se predstaviti zbirom dva nekorelisana procesa
    - Prva komponenta: deterministička
    - Druga komponenta: stohastička
  - Stohastička komponenta naziva se **linearni proces** i predstavlja se kao:

$$X_t - \mu = e_t + \psi_1 e_{t-1} + \psi_2 e_{t-2} + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i e_{t-i}, \psi_0 = 1, E(X_t) = \mu.$$

$$X_t - \mu = \underbrace{(1 + \psi_1 L + \psi_2 L^2 + \ldots)}_{\Psi(L)} e_t$$

3

3

Linearni proces II

- Svojstva:

$$1.\ \mathrm{var}(X_t) = \gamma_0 = E(X_t - \mu)^2 = \sigma^2 \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2, E(e_t)^2 = \sigma^2.$$

$$2.\ \gamma_k = \sigma^2 \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \psi_{k+i}, k = 1,2,\ldots$$

$$3.\ \rho_k = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \psi_{k+i}}{\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2}, k = 1,2,..$$

$$4.\ Parametri\ \underbrace{\psi_1, \psi_2, \psi_{3,\ldots}}_{\psi-\text{ponderi}}\ odredjuju\ apsolutno\ konvergentan\ \ red:$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} |\psi_i| < \infty.$$

4

4

Osnovni modeli stacionarnih vremenskih serija

- Autoregresioni modeli (AR)
- Modeli pokretnih sredina (PS, engl. MA)
- Autoregresioni modeli pokretnih proseka (ARPS, engl. ARMA)

5

5

Opšte forme modela stacionarnih vremenskih serija

- AR(p) model

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \ldots + \phi_p X_{t-p} + e_t$$

- MA(q) model

$$X_t = e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2} - \ldots - \theta_q e_{t-q}$$

- ARMA(p,q) model

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \ldots + \phi_p X_{t-p} + e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2} - \ldots - \theta_q e_{t-q}$$

- Parametri modela su:

$$\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q$$

6

6

Jednostavni modeli

- AR(1): $X_t = \phi_1 X_{t-1} + e_t$
- AR(2): $X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + e_t$
- MA(1): $X_t = e_t - \theta_1 e_{t-1}$
- MA(2): $X_t = e_t - \theta_1 e_{t-1} - \theta_2 e_{t-2}$
- ARMA(1,1): $X_t = \phi_1 X_{t-1} + e_t - \theta_1 e_{t-1}$
- ARMA(2,1): $X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + e_t - \theta_1 e_{t-1}$

7

7

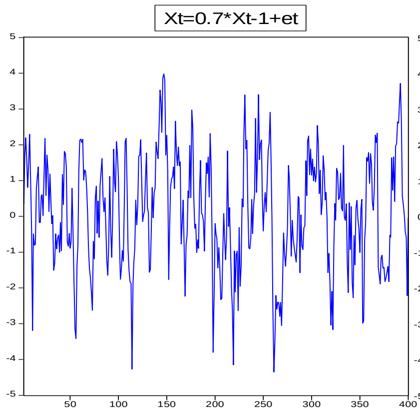
Značaj modela

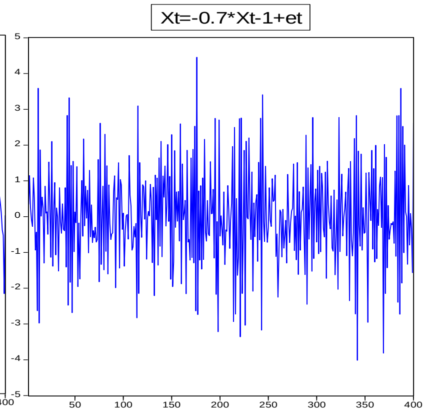
- Nisu opterećeni postavkama ekonomske teorije
- Jednostavni su za ocenjivanje, jer obično ne sadrže veliki broj parametara
- Pouzdani za prognoziranje budućeg kretanja vremenske serije za horizont predviđanja do godine dana

8

8

Primer AR(1) modela

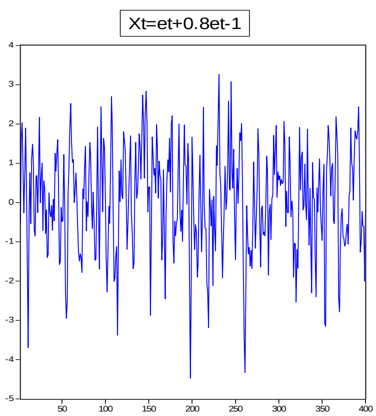


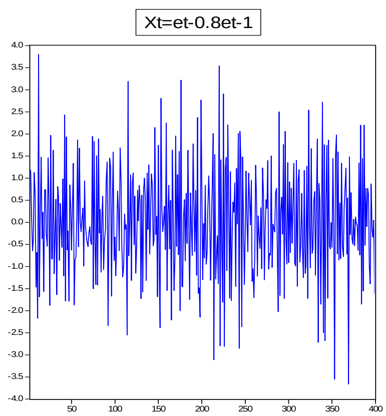


9

9

Primer MA(1) modela





10

10

Uslov stacionarnosti I

- Relevantan kod AR modela i ARMA modela
- AR(p) model:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + ... + \phi_p X_{t-p} + e_t$$

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} - ... - \phi_p X_{t-p} = e_t$$

- AR modelu reda p može se pridružiti karakteristična jednačina oblika:

$$g^p - \phi_1 g^{p-1} - \phi_2 g^{p-2} - ... - \phi_p = 0$$

  - gde g_1, g_2,..., g_p označavaju rešenja (korene) karakteristične jednačine.

- Stacionarnost vremenske serije koja je opisana AR(p) modelom zavisi od rešenja karakteristične jednačine g_1, g_2,..., g_p.

11

11

Uslov stacionarnosti II

Može se pokazati da važi sledeća teorema:

- Ukoliko su svi koreni g_1, g_2,..., g_p po modulu strogo manji od jedan, onda je vremenska serija stacionarna.

- Ukoliko postoji bar jedan koren g_i, $i=1, 2,..., p$, koji je jednak vrednosti jedan po modulu, dok su drugi koreni strogo manji od jedan po modulu, onda je vremenska serija nestacionarna.
  - Takva vremenska serija se uobičajeno naziva vremenska serija sa jediničnim korenom.

- Ukoliko postoji bar jedan koren g_i, $i=1,2,...,p$, koji je po modulu strogo veći od jedan, dok su drugi strogo manji od jedan, tada je vremenska serija eksplozivna.

12

12

Autoregresioni modeli

AR(1) model detaljno se analizira na tabli...

$X_t = \phi_1 X_{t-1} + e_t$

1. Uslov stacionarnosti: $|\phi_1| < 1$
2. Linearni proces:

$$X_t = e_t + \underbrace{\psi_1}_{\phi_1} e_{t-1} + \underbrace{\psi_2}_{\phi_1^2} e_{t-2} + \underbrace{\psi_3}_{\phi_1^3} e_{t-3} + \ldots$$

3. Autokovarijaciona funkcija: $\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1},\ k > 0$
4. Obična autokorelaciona funkcija: $\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} \Leftrightarrow \rho_k = \phi_1{}^k, k > 0$
5. Parcijalna autokorelaciona funkcija: $\phi_{11} = \rho_1 = \phi_1, \phi_{kk} = 0,\ k=2,3,\ldots$
6. $\mathrm{var}(X_t) = \dfrac{\sigma^2}{(1-\phi_1^2)}$

13

13

Obična autokorelaciona funkcija AR(1) modela

Model	**Uslov stacionarnosti**	**Obična autokorelaciona funkcija**
AR(1), $0<\phi_1<1$ **$X_t=\phi_1 X_{t-1}+e_t$**	$\lvert\phi_1\rvert < 1$	$\rho_k=\phi_1{}^k$, k=1,2,… Opada po eksponencijalnoj putanji
AR(1), $-1<\phi_1<0$ **$X_t=\phi_1 X_{t-1}+e_t$**		$\rho_k=\phi_1{}^k$, k=1,2,… Opada po eksponencijalno oscilatornoj putanji (menja znak za svako k).

14

14

Parcijalna autokorelaciona funkcija AR(1) modela

Model	**Dodatni opis**	**Parcijalna autokorelaciona funkcija**
AR(1), 0<ϕ_1<1 $X_t=\phi_1 X_{t-1}+e_t$	Između X_t i X_{t-1} nema dodatnog uticaja	$\phi_{11}=\rho_1=\phi_1$, $k=1$ $\phi_{kk}=0$, $k=2,3,...$
AR(1), -1<ϕ_1<0 $X_t=\phi_1 X_{t-1}+e_t$		$\phi_{11}=\rho_1=\phi_1$, $k=1$ $\phi_{kk}=0$, $k=2,3,...$

15

15

Modeli pokretnih sredina: MA(1) model detaljno za samostalni rad

- MA(1) modelu, $X_t = e_t - \theta_1 e_{t-1}$, odgovara AR model beskonačnog reda ($-1 < \theta_1 < 1$) :

$$X_t = \pi_1 X_{t-1} + \pi_2 X_{t-2} + \pi_3 X_{t-3} + \ldots + e_t$$
$$\pi_1 = -\theta_1, \pi_2 = -\theta_1^2, \ldots, \pi_j = -\theta_1^j, j = 1,2,\ldots$$

- Obična autokorelaciona funkcija
  - Jedina nenulta vrednost na prvoj docnji
  - Autokorelacioni koeficijent je u intervalu (-0.5;0.5)
- Parcijalna autokorelaciona funkcija poseduje niz nenultih vrednosti

16

16

Obična autokorelaciona funkcija jednostavnih AR i MA modela

Model	**Uslov stacionarnosti**	**Obična autokorelaciona funkcija**
Beli šum, MA(0)	Uvek stacionarna	$\rho_k=0$, $k=1,2,\ldots$
AR(1), $0<\phi_1<1$ $X_t=\phi_1 X_{t-1}+e_t$	$\lvert\phi_1\rvert < 1$	$\rho_k=\phi_1^k$, $k=1,2,\ldots$ Opada po eksponencijalnoj putanji
AR(1), $-1<\phi_1<0$ $X_t=\phi_1 X_{t-1}+e_t$		$\rho_k=\phi_1^k$, $k=1,2,\ldots$ Opada po eksponencijalno oscilatornoj putanji
MA(1), $0<\theta_1<1$ $X_t=e_t-\theta_1 e_{t-1}$	Uvek stacionarna	$\rho_1= -\theta_1/(1+\theta_1^2) < 0$, $\rho_k=0$, $k=2,3,\ldots$
MA(1), $-1<\theta_1<0$ $X_t=e_t-\theta_1 e_{t-1}$		$\rho_1= -\theta_1/(1+\theta_1^2) > 0$, $\rho_k=0$, $k=2,3,\ldots$

17

Parcijalna autokorelaciona funkcija jednostavnih AR i MA modela

Model	**Dodatni opis**	**Parcijalna autokorelaciona funkcija**
Beli šum, MA(0)	Nekorelisan proces	$\phi_{kk}=0$, $k=1,2,\ldots$
AR(1), $0<\phi_1<1$ $X_t=\phi_1 X_{t-1}+e_t$	Između X_t i X_{t-1} nema dodatnog uticaja	$\phi_{11}=\rho_1=\phi_1$, $k=1$ $\phi_{kk}=0$, $k=2,3,\ldots$
AR(1), $-1<\phi_1<0$ $X_t=\phi_1 X_{t-1}+e_t$		$\phi_{11}=\rho_1=\phi_1$, $k=1$ $\phi_{kk}=0$, $k=2,3,\ldots$
MA(1), $0<\theta_1<1$ $X_t=e_t-\theta_1 e_{t-1}$	Poseduje AR reprezentaciju beskonačnog reda.	Opada po eksponencijalnoj putanji.
MA(1), $-1<\theta_1<0$ $X_t=e_t-\theta_1 e_{t-1}$		Opada po eksponencijalno oscilatornoj putanji.

18

Opšti oblik **obične** autokorelacione funkcije AR i MA modela

Model	Obična autokorelaciona funkcija
AR(p)	Opada po eksponencijalnoj, eksponencijalno oscilatornoj ili sinusoidnoj putanji.
MA(q)	$\rho_1 \neq 0, \rho_2 \neq 0, \ldots, \rho_q \neq 0, \rho_k = 0$ za k>q. Jednaka je nuli za docnje veće od reda modela.

19

19

Opšti oblik **obične** i **parcijalne** autokorelacione funkcije AR i MA modela

Model	Obična autokorelaciona funkcija	Parcijalna autokorelaciona funkcija
AR(p)	Opada po eksponencijalnoj, eksponen. oscilatornoj ili sinusoidnoj putanji	$\phi_{11} \neq 0, \phi_{22} \neq 0, \ldots, \phi_{pp} \neq 0, \phi_{kk} = 0$ za $k>p$. Jednaka je nuli za docnje veće od reda modela
MA(q)	$\rho_1 \neq 0, \rho_2 \neq 0, \ldots, \rho_q \neq 0, \rho_k = 0$ za $k>q$. Jednaka je nuli za docnje veće od reda modela	Opada po eksponencijalnoj, eksponen. oscilatornoj ili sinusoidnoj putanji

20

20

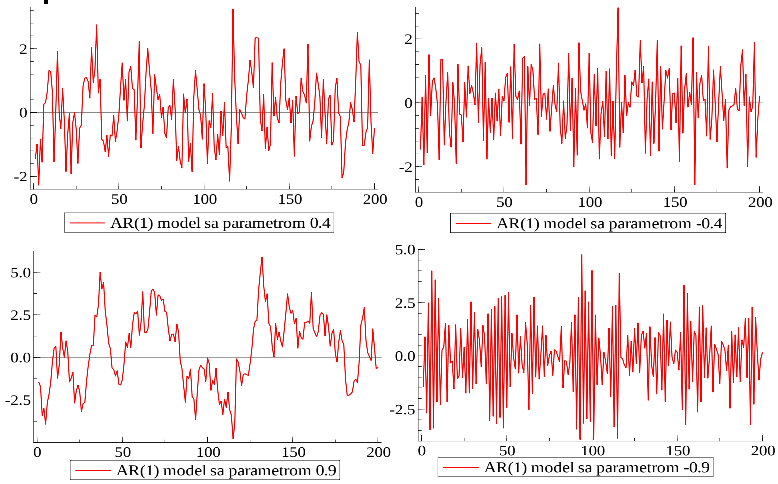
Primeri:

1. Ocene autokorelacionih koeficijenata generisanih AR(1) i AR(2) vremenskih serija
2. Ocene autokorelacionih koeficijenata generisane MA(1) vremenske serije
3. Izbor adekvatnog modela za osnovnu inflaciju u Srbiji.

21

21

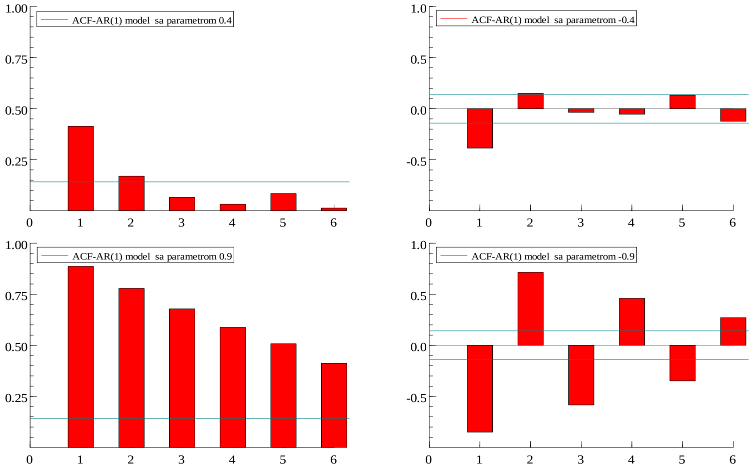
Primer 1: AR(1) modeli



22

22

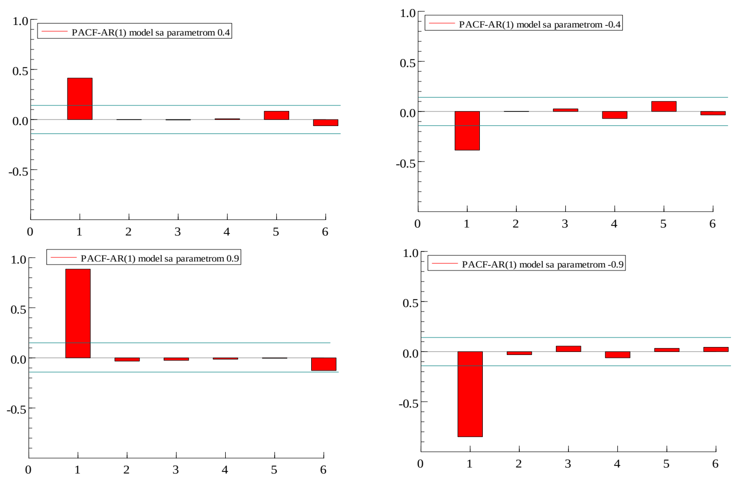
Primer 1: obična autokorelaciona funkcija kod četiri AR(1) modela



23

23

Primer 1: parcijalna autokorelaciona funkcija kod četiri AR(1) modela



24

24

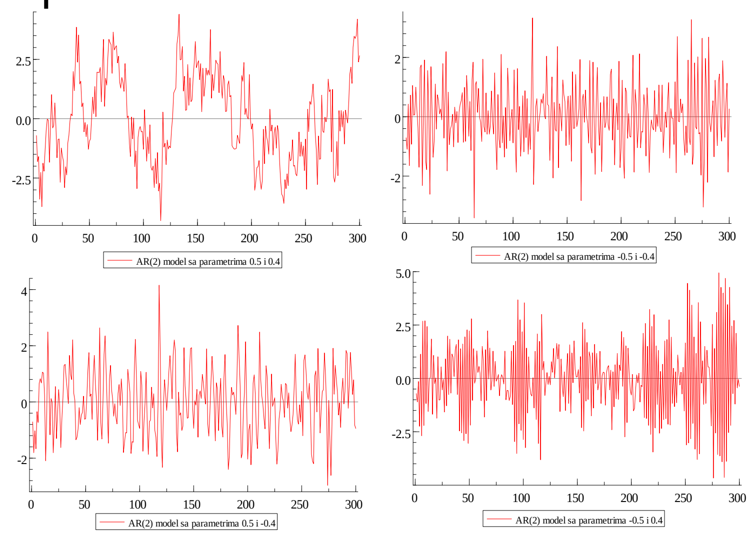
Primer 1: putanja obične autokorelacione funkcije AR(2) modela

Rešenja karakteristične jednačine	Realna	Kompleksna
Opadanje vrednosti autokorelacionih koeficijenata	Eksponencijalno	Prigušeno sinusoidno
	Oscilatorno eksponencijalno	

25

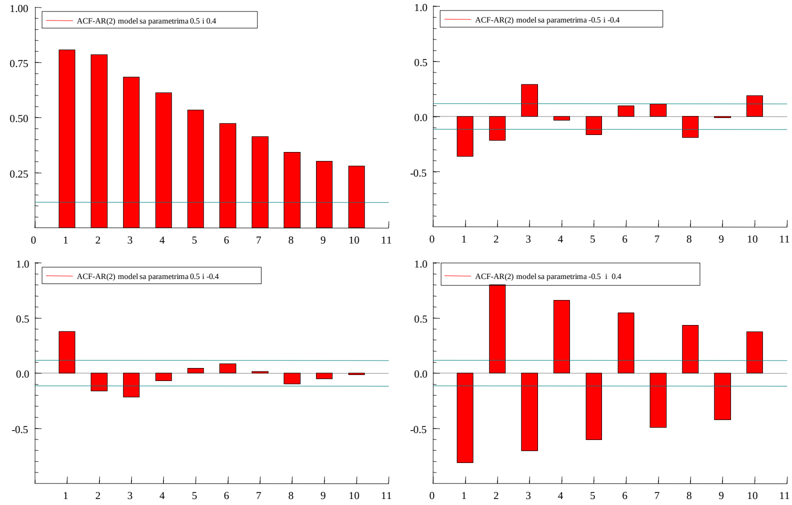
25

Primer 1: AR(2) modeli



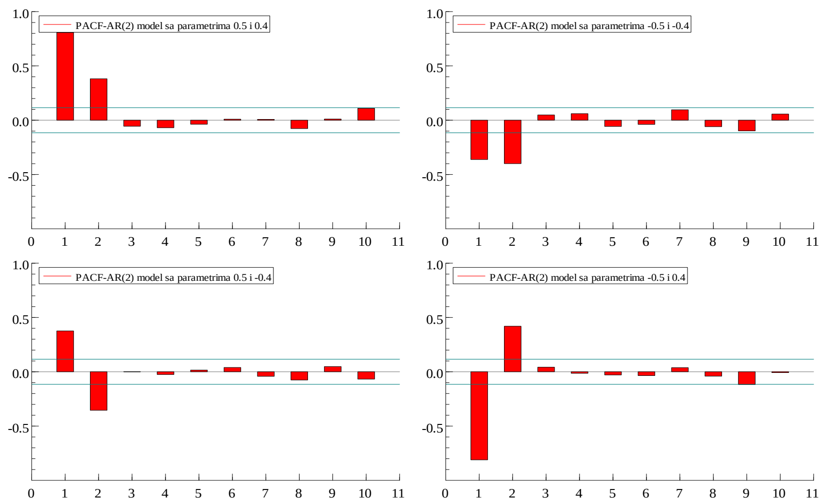
26

Primer 1: obična autokorelaciona funkcija kod četiri AR(2) modela



27

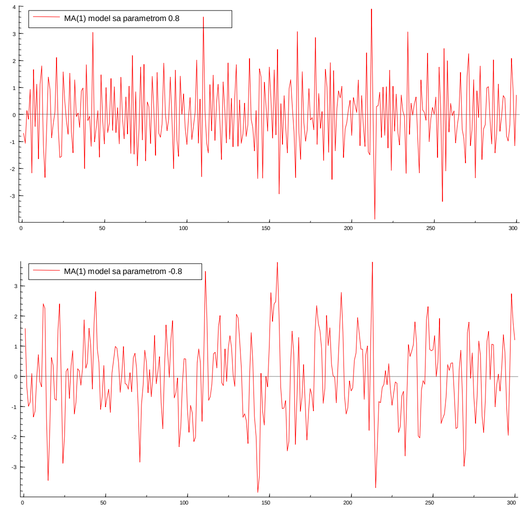
Primer 1: parcijalna autokorelaciona funkcija kod četiri AR(2) modela



28

Primer 2: MA(1) modeli

$X_t=e_t-0.8e_{t-1}$, $X_t=e_t+0.8e_{t-1}$

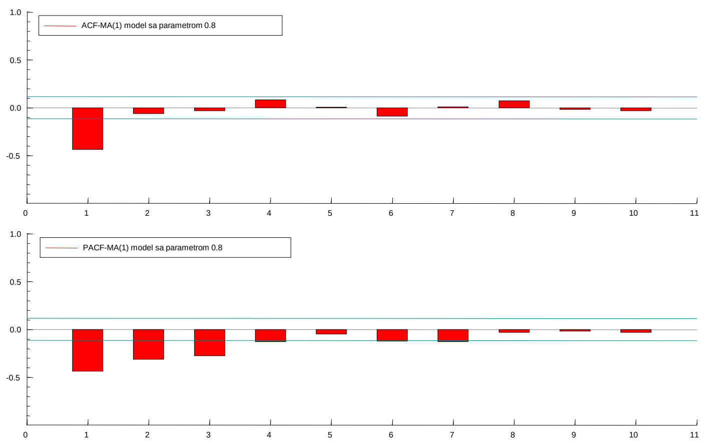


29

29

Primer 2: obična i parcijalna autokorelaciona funkcija MA(1) modela

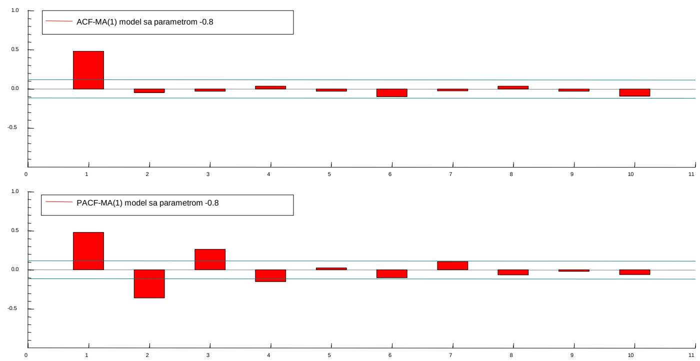
$X_t=e_t-0.8e_{t-1}$



30

30

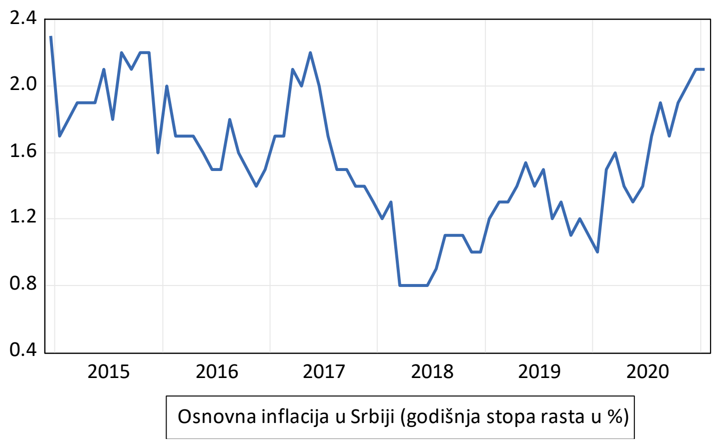
Primer 2: obična i parcijalna autokorelaciona funkcija MA(1) modela $X_t = e_t + 0.8e_{t-1}$



31

31

Primer 3: analiza korelacione strukture osnovne inflacije privrede Srbije, 2014:12-2021:1 (T=74) (vezba1.wf1) I



32

32

Primer 3: analiza korelacione strukture osnovne inflacije privrede Srbije, 2014:12-2021:1 (*T*=74) II

Docnja (k)	Ocena <u>običnog</u> autokorel. koeficijenta	Značajna korelacija
1	0.824	DA
2	0.754	DA
3	0.657	DA
4	0.564	DA
5	0.508	DA
6	0.402	DA
7	0.327	DA
8	0.287	DA

- Interval poverenja sa verovatnoćom 0.95: [-0.228;0.228]

33

33

Primer 3: analiza korelacione strukture osnovne inflacije privrede Srbije III

Docnja (k)	Ocena <u>parcijalnog</u> autokorel. koeficijenta	Značajna korelacija
1	0.824	DA
2	0.232	DA
3	-0.037	NE
4	-0.064	NE
5	0.062	NE
6	-0.144	NE
7	-0.044	NE
8	0.102	NE

- Interval poverenja sa verovatnoćom 0.95: [-0.228;0.228]
- Zaključak: ovu seriju *verovatno* treba modelirati na osnovu AR(2) forme.

34

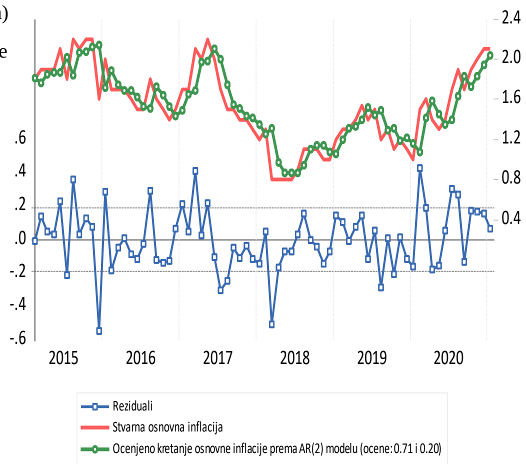
34

Primer 3: analiza korelacione strukture osnovne inflacije privrede Srbije IV (analiza reziduala iz AR(2) modela)

- Ocene autokorelacionih koeficijenata reziduala iz AR(2) modela (sa konstantom) ukazuju na to da je ocenjenim modelom obuhvaćena autokorelacija u seriji osnovne inflacije, jer nije prisutna u rezidualima.

Docnja	**Ocena običnog autokorel. koef. reziduala**
1	**0.013**
2	**0.105**
3	**0.005**
4	**-0.066**
5	**0.190**
6	**-0.164**
7	**0.041**
8	**-0.006**

- Interval poverenja sa verovatnoćom 0.95: [-0.23;0.23].



35

35

Primer 3: analiza korelacione strukture osnovne inflacije privrede Srbije V (analiza reziduala iz AR(2) modela)

$\mathrm{H_0}: \rho_1 = \rho_2 = ... = \rho_m = 0, \; \mathrm{H_1}: \mathrm{H_0}$ nije tačno

$$BLj(m) = Q(m) = T(T+2)\sum_{i=1}^{m}\frac{\hat{\rho}_i^{\,2}}{T-i} : \chi^2_m$$

Serija reziduala iz AR(2) modela : sada je $T = 72, Q(m): \chi^2_{m-2}$

$\mathrm{H_0}: \rho_1 = \rho_2 = ... = \rho_8 = 0, \mathrm{H_1}: \mathrm{H_0}$ nije tačno

$$Q(8) = 72 * 74$$

$$* \left[\frac{(0.013)^2}{(72-1)} + \frac{(0.105)^2}{(72-2)} + \frac{(0.005)^2}{(72-3)} + \frac{(-0.066)^2}{(72-4)} + \frac{(0.190)^2}{(72-5)} + \frac{(-0.164)^2}{(72-6)} + \frac{(0.041)^2}{(72-7)} + \frac{(-0.006)^2}{(72-8)}\right]$$

$Q(8) = 6.38 < \chi^2_6(0.05) = 12.6 \Rightarrow \mathrm{H_0}$ se ne odbacuje.
U modelu ne postoji zbirna autokorelacija reda 8.

36

36