Osnovni pojmovi u Analizi vremenskih serija

Zorica Mladenović

1

1

Osnovni pojmovi

- Elementarne oznake
- Slučajan proces i vremenska serija
- Stacionarnost
- Autokovarijaciona funkcija
- Autokorelaciona funkcija
  - Obična
  - Parcijalna
- Testovi autokorelacije
- Primeri

2

2

Elementarne oznake

- Nivo vremenske serije u trenutku t: X_t
- Docnja prvog reda: $t-1$
- Operator docnje prvog reda: $L X_t = X_{t-1}$
- Diferenca prvog reda (obična diferenca):

$$\Delta X_t = X_t - X_{t-1} = (1-L)X_t$$

- Diferenca reda k (sezonska diferenca):

$$\Delta_k X_t = X_t - X_{t-k} = \left(1-L^k\right)X_t$$

3

3

Slučajan proces i vremenska serija

- Slučajan proces: niz slučajnih promenljivih koje su uređene u odnosu na vreme
- Uobičajena oznaka:

$$X_1, X_2, \ldots$$
$$X_t, t = 1,2, \ldots$$

- Vremenska serija:
  - I koncept: jedna realizacija slučajnog procesa
  - II koncept: ne postoji razlika između vremenske serije i slučajnog procesa
- **Termine koristimo kao sinonime: vremenski niz slučajnih promenljivih.**

4

4

Stacionarnost I

- Stacionarnost vremenske serije: vremenska serija se kreće po prepoznatljivoj putanji tokom vremena
- Dva koncepta: stroga i slaba stacionarnost
- Definicija slabe stacionarnosti:

1. $E(X_t) = \mu = const, \ t = 1,2,\dots$

2. $var(X_t) = E(X_t - \mu)^2 = const, \ t = 1,2,\dots$

3. $\text{cov}(X_t, X_{t-k}) = E(X_t - \mu)(X_{t-k} - \mu) = \gamma(k) = \gamma_k,$
$t = 1,2,\dots, \ k = 1,2,\dots$

5

Treći uslov stacionarnosti: kovarijansa - podsećanje

$$\text{cov}(X, Y) = E(X - E(X))(Y - E(Y))$$

$$X = X_t, \ E(X_t) = \mu$$
$$Y = X_{t-k}, E(X_{t-k}) = \mu$$

$$\text{cov}(X_t, X_{t-k}) = E(X_t - \mu)(X_{t-k} - \mu)$$

6

6

Stacionarnost II

- Očekivana vrednost i varijansa slabo stacionarne vremenske serije su invarijantne u odnosu na vreme. Transliranjem u vremenu ove dve veličine se **ne** menjaju.
- Kovarijansa između članova vremenske serije zavisi samo od rastojanja (docnje), a ne od vremenskog trenutka. To znači da je za datu docnju *k* kovarijansa ista:

$$\text{cov}(X_t, X_{t-k}) = const, \text{ za dato k i t} = 1,2,\ldots$$

7

7

Stacionarnost: kovarijansa je samo funkcija rastojanja *k*

$$X_1, X_2, X_3, \ldots, X_{51}, X_{52}, X_{53}$$

$$\underbrace{X_1, X_2}_{\gamma_1}, X_3, \ldots, \underbrace{X_{51}, X_{52}}_{\gamma_1}, X_{53}$$

$$X_1, \underbrace{X_2, X_3}_{\gamma_1}, \ldots, X_{51}, \underbrace{X_{52}, X_{53}}_{\gamma_1}$$

$$\underbrace{X_1, \ldots, X_3}_{\gamma_2}, \ldots, \underbrace{X_{51}, \ldots, X_{53}}_{\gamma_2}$$

8

8

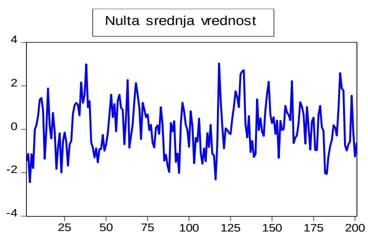
Tri tipa stacionarnosti u zavisnosti od srednje vrednosti

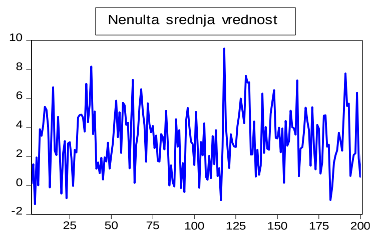
- Oko nulte srednje vrednosti
- Oko nenulte srednje vrednosti
- Oko funkcije linearnog trenda (trend-stacionarnost)

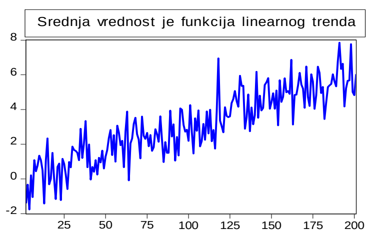
9

9

Tri tipa stacionarnosti u zavisnosti od srednje vrednosti: primer







10

10

Najjednostavniji primer stacionarne vremenske serije: beli šum (engl. white noise)

- $E(e_t) = 0, \quad t = 1,2,\ldots$
- $\mathrm{var}(e_t) = E(e_t)^2 = \sigma^2 = const, \; t = 1,2,\ldots$
- $\mathrm{cov}(e_t, e_{t-k}) = E(e_t e_{t-k}) = 0, \; t = 1,2,\ldots, \; k = 1,2,\ldots$

- Niz nekorelisanih slučajnih promenljivih nulte srednje vrednosti i stabilne varijanse

11

11

Gausov beli šum

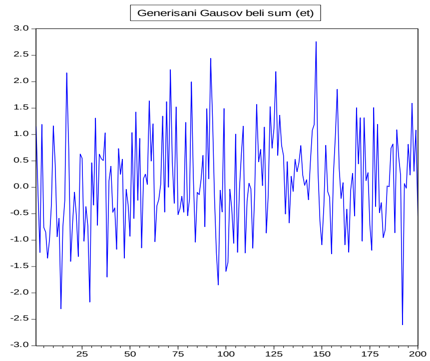
- $E(e_t) = 0, \quad t = 1,2,\ldots$
- $\mathrm{var}(e_t) = E(e_t)^2 = \sigma^2 = const, \quad t = 1,2,\ldots$
- Članovi vremenske serije su nezavisne slučajne promenljive $\Rightarrow$ $\mathrm{cov}(e_t, e_{t-k}) = E(e_t e_{t-k}) = 0,$ $t = 1,2,\ldots, \; k = 1,2,\ldots$
- $e_t : \mathrm{N}(0, \sigma^2), t = 1,2,\ldots$

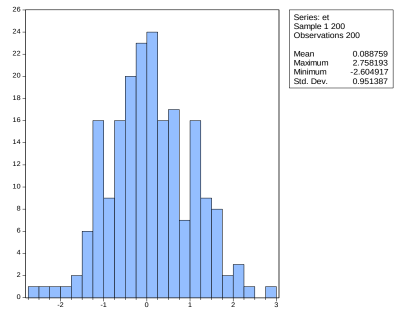
- Niz nezavisnih slučajnih promenljivih koje su normalno raspodeljene sa nultom srednjom vrednošću i stabilnom varijansom

12

12

Gausov beli šum: grafički prikaz





13

13

Beli šum - dodatno

- Bela svetlost – disperzijom kroz kristalnu prizmu dobijaju se osnovne boje spektra koje se javljaju sa jednakim ponderom
- Spektar bele svetlosti: komponente na nižim i višim frekvencijama imaju identičan udeo.

14

14

Autokovarijaciona funkcija

- Kako utvrditi koji od modela odgovara datom skupu podataka? Potrebno je da analiziramo korelacionu strukturu podatka.
- **Autokovarijacioni koeficijent na docnji *k***:

  $\gamma_k = \text{cov}(X_t, X_{t-k}) = E(X_t - \mu)(X_{t-k} - \mu), k = 0,1,2,\ldots$

- Niz $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ predstavlja autokovarijacionu funkciju.

15

15

Autokovarijaciona funkcija: svojstva

$$\gamma_k = \text{cov}(X_t, X_{t-k}) = E(X_t - \mu)(X_{t-k} - \mu), k = 0,1,2,\ldots$$

1. $\gamma_0 = E(X_t - \mu)^2 = \text{var}(X_t)$
2. $\gamma_k = \gamma_{-k}$
3. $|\gamma_k| \le \gamma_0, k = 0,1,2,\ldots$
4. $Matrica\ autokovarijacionih\ koeficijenata\ je\ pozitivno\ semidefinitna.$

16

16

Koeficijent korelacije: podsećanje

- $\rho(X,Y) = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sqrt{var(X)var(Y)}}$
- $-1 \leq \rho(X,Y) \leq 1$
- $\rho(X,Y) = \rho(Y,X)$
- $X = X_t,\ Y = X_{t-k}$
- $\rho_k = \frac{\text{cov}(X_t, X_{t-k})}{\sqrt{\text{var}(X_t)\ \text{var}(X_{t-k})}}$

17

17

Autokorelaciona funkcija (obična)

- **Autokorelacioni koeficijent (obični) na docnji *k***:

$$\rho_k = \frac{\text{cov}(X_t, X_{t-k})}{\sqrt{\text{var}(X_t)\ \text{var}(X_{t-k})}}$$

$$\rho_k = \frac{\text{cov}(X_t, X_{t-k})}{\text{var}(X_t)} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}$$

$k = 0,1,2,\ldots$

- Niz $\rho_1, \rho_2, \ldots$ predstavlja običnu autokorelacionu funkciju.
- Grafički prikaz niza $\rho_1, \rho_2, \ldots$ naziva se obični korelogram.
- EVIEWS oznaka: AC.

18

18

Autokorelaciona funkcija (obična): svojstva

1. $\gamma_0 = E(X_t - \mu)^2 = var(X_t) \Rightarrow \rho_0 = 1$

2. $\gamma_k = \gamma_{-k} \Rightarrow \rho_k = \rho_{-k}$

3. $|\gamma_k| \leq \gamma_0 \Rightarrow |\rho_k| \leq 1, k = 0,1,2,\ldots$

4. *Matrica autokorelacionih koeficijenata je pozitivno semidefinitna.*

19

19

Parcijalna autokorelaciona funkcija

- Stepen korelisanosti između X_t i X_{t-k} smo merili na osnovu običnog autokorelacionog koeficijenta na docnji k.
- Autokorelacioni koeficijent na docnji k može biti pod uticajem korelisanosti X_t i X_{t-k} sa članovima vremenske serije na docnjama između vremenskih trenutaka t i $t-k$ ($X_{t-1}, X_{t-2},\ldots,X_{t-k+1}$).
- Eliminacijom uticaja $X_{t-1}, X_{t-2},\ldots, X_{t-k+1}$ dobija se pokazatelj **čiste** korelisanosti između X_t i X_{t-k} : parcijalni autokorelacioni koeficijent.

20

20

Parcijalna autokorelaciona funkcija II

- X_{t-2}, X_{t-1}, X_t
- $\{\langle X_{t-1}, X_t\rangle, Meri\ \rho_1$
- $\{\langle X_{t-1}, X_{t-2}\rangle, Meri\ \rho_1$
- $\{\langle X_t, X_{t-2}\rangle, Meri\ \rho_2$
- ρ_2 pokazuje povezanost izmedju X_t i X_{t-2} , koja je pod uticajem X_{t-1} .
- Ako postoji jaka autokorelacija prvog reda ρ_1, onda će
  - X_t i X_{t-2} *biti pod uticajem* X_{t-1}
  - X_{t-1} *je izvor zajedničkih varijacija*
  - ρ_2 *će verovatno biti precenjeno.*

21

21

Parcijalna autokorelaciona funkcija III

- Ovaj koeficijent na docnji *k* označava se sa ϕ_{kk}.
- Niz ϕ_{11} ϕ_{22}, ... predstavlja parcijalnu autokorelacionu funkciju.
- Grafički prikaz niza ϕ_{11} ϕ_{22}, ... naziva se parcijalni korelogram.
- EVIEWS oznaka: PAC.

22

22

Parcijalna autokorelaciona funkcija (definicija na osnovu regresione analize)

1. X_t ocenjujemo u funkciji od $X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots, X_{t-k+1}$ primenom metoda ONK
$\Rightarrow \hat{X}_t$ je deo X_t koji sadrži uticaj $X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots, X_{t-k+1}$
$\Rightarrow (X_t - \hat{X}_t)$ je deo X_t koji ne sadrži uticaj $X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots, X_{t-k+1}$.

2. X_{t-k} ocenjujemo u funkciji od $X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots, X_{t-k+1}$ primenom metoda ONK
$\Rightarrow \hat{X}_{t-k}$ je deo X_{t-k} koji obuhvata dejstvo $X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots, X_{t-k+1}$
$\Rightarrow (X_{t-k} - \hat{X}_{t-k})$ je deo X_{t-k} iz koga je isključen uticaj $X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots, X_{t-k+1}$.

3. Parcijalni autokorelacioni koeficijent na docnji k definiše se kao obični autokorelacioni koeficijent izmedju $(X_t - \hat{X}_t)$ i $(X_{t-k} - \hat{X}_{t-k})$:

$$\phi_{kk} = \frac{\mathrm{cov}\left[(X_t - \hat{X}_t), (X_{t-k} - \hat{X}_{t-k})\right]}{\sqrt{\mathrm{var}(X_t - \hat{X}_t)\,\mathrm{var}(X_{t-k} - \hat{X}_{t-k})}}, k = 2,3,\ldots$$

23

23

Testovi autokorelacije u vremenskoj seriji

1. Da li postoji autokorelacija na tačno određenoj docnji *k*?

H_0: $\rho_k=0$, H_1: $\rho_k\neq 0$ ili

H_0: $\phi_{kk}=0$, H_1: $\phi_{kk}\neq 0$

2. Da li postoji autokorelacija na svim docnjama zaključno do docnje *m*?

H_0: $\rho_1= \rho_2 =\ldots= \rho_m =0$,

H_1: Bar jedan od autokorelacionih koeficijenata na prvih *m* docnji je različit od nule.

24

24

Testovi autokorelacije u vremenskoj seriji II

Ocena običnog/parcijalnog autokorelacionog koef.

Uzorak obima T: $X_1, X_2, \ldots, X_T$, $\overline{X}$ – aritmetička sredina

$$\hat{\rho}_k = \frac{\sum_{t=k+1}^{T}(X_t - \overline{X})\,(X_{t-k} - \overline{X})}{\sum_{t=1}^{T}(X_t - \overline{X})^2}, \qquad k = 1, \ldots, T-2$$

25

25

Testovi autokorelacije u vremenskoj seriji III

Svojstva ocene običnog/parcijalnog autokorelacionog koeficijenta

1. $\hat{\rho}_k$ je pristrasna, ali konzistentna ocena
(pod dovoljno opštim uslovima za stacionarnu vremensku seriju)

2. Pod pretpostavkom da ne postoji korelacija
na docnji k ($\rho_k = 0$) za dovoljno veliko T važi:

$$\hat{\rho}_k:\ N\left(0, \frac{1}{T}\right) \Rightarrow z = \frac{\hat{\rho}_k - 0}{\sqrt{\frac{1}{T}}} = \hat{\rho}_k\sqrt{T}: N(0,1)$$

$$\Rightarrow P\left[-1.96 \le \hat{\rho}_k\sqrt{T} \le 1.96\right] = 0.95$$

$$\Rightarrow P\left[-1.96/\sqrt{T} \le \hat{\rho}_k \le 1.96/\sqrt{T}\right] = 0.95$$

Navedeno važe i za ocenu parcijalnog autokorelacionog koeficijenta.

26

26

Da li postoji značajna autokorelacija na docnji k? (H_0: $\rho_k=0$, H_1: $\rho_k\neq 0$)

- Validnost hipoteze H_0: $\rho_k = 0$ se testira protiv alternativne H_1: $\rho_k \neq 0$, tako što se proverava da li je ocena običnog autokorelacionog koeficijenta na docnji *k* element intervala $[-1.96/\sqrt{T}, 1.96/\sqrt{T}]$.

- Nulta hipoteza se ne može odbaciti ako je:

$$\hat{\rho}_k \in \left[-1.96/\sqrt{\mathrm{T}}, 1.96/\sqrt{\mathrm{T}}\right]$$

- Nulta hipoteza se odbacuje za nivo značajnosti 5% ako je:

$$\hat{\rho}_k \notin \left[-1.96/\sqrt{\mathrm{T}}, 1.96/\sqrt{\mathrm{T}}\right]$$

27

27

Da li postoji značajna autokorelacija na docnji k? (H_0: $\phi_{kk}=0$, H_1: $\phi_{kk}\neq 0$)

- Validnost hipoteze H_0: $\phi_{kk} = 0$ se testira protiv alternativne H_1: $\phi_{kk} \neq 0$, tako što se proverava da li je ocena parcijalnog autokorelacionog koeficijenta na docnji *k* element intervala $[-1.96/\sqrt{T}, 1.96/\sqrt{T}]$.

- Nulta hipoteza se ne može odbaciti ako je:

$$\hat{\phi}_{kk} \in \left[-1.96/\sqrt{T}, 1.96/\sqrt{T}\right]$$

- Nulta hipoteza se odbacuje za nivo značajnosti 5% ako je:

$$\hat{\phi}_{kk} \notin \left[-1.96/\sqrt{T}, 1.96/\sqrt{T}\right]$$

28

28

Da li postoji značajna autokorelacija zaključno sa docnjom *m*?
(H_0: $\rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_m = 0$, H_1: H_0 nije tačno)

- Box-Pierce-ova, *BP(m)*, i Box-Ljung-ova, *BLj(m)*, test-statistika:

$$BP(m) = T\sum_{i=1}^{m}\hat{\rho}_i^{\,2} : \chi^2_m$$

$$BLj(m) = Q(m) = T(T+2)\sum_{i=1}^{m}\frac{\hat{\rho}_i^{\,2}}{T-i} : \chi^2_m$$

- Nulta hipoteza se odbacuje uz nivo značajnosti 5%
  - ako je *Q(m)* veće od korespondirajuće kritične vrednosti hi-kvadrat raspodele sa *m* stepeni slobode (χ^2_m) i nivo značajnosti *5%.*
  - ako je korespondirajuća *p*-vrednost manja od 5%.
- Broj *m* se definiše kao funkcija od *T*: $\sqrt{T},\ 2\sqrt{T}, \ln(T)$

29

Objašnjenje raspodele BP i BLj statistike

- $BP(m) = T\sum_{i=1}^{m}\hat{\rho}_i^2.$
- Ako je tačna nulta hipoteza:

$$\hat{\rho}_1 : N(0{,}1/T) \Rightarrow z_1 = \sqrt{T}\hat{\rho}_1 : N(0{,}1)$$
$$\hat{\rho}_2 : N(0{,}1/T) \Rightarrow z_2 = \sqrt{T}\hat{\rho}_2 : N(0{,}1)$$
$$\ldots$$
$$\hat{\rho}_m : N(0{,}1/T) \Rightarrow z_m = \sqrt{T}\hat{\rho}_m : N(0{,}1)$$

$$\underbrace{z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_m^2}_{\Downarrow} : \chi^2_m$$
$$T\sum_{i=1}^{m}\hat{\rho}_i^2 = BP(m) : \chi^2_m.$$

30

Testovi autokorelacije: važna napomena

- Svi navedeni testovi mogu se koristiti u klasičnom regresionom modeliranju kada se proverava kvalitet ocenjenog modela.
- Testovi se primenjuju na vremensku seriju reziduala.
- Broj stepeni slobode u primeni *BP* i *BLj* test-statistika je razlika između broja ocenjenih običnih autokorelacionih koeficijenata (m) i broja ocenjenih parametara modela (bez slobodnog člana).

31

31

Primeri: primena autokorelacione funkcije

1. Izračunavanje ocena običnih autokorelacionih koeficijenata i korespondirajućih standardnih grešaka na osnovu podataka vremenske serije
2. Provera da li je konkretna vremenska serija beli šum
3. Izračunavanje Box-Ljungove test-statistike i transformacija polazne vremenske serije.

32

32

Primer 1 (uključujući i naredna 4 slajda)

- Sledeća tabela sadrži podatke o 12 opservacija vremenske serije.
- Oceniti obične autokorelacione koeficijente na docnjama 1 i 2.
- Izračunati standardne greške ocena autokorelacionih koeficijenata na docnjama 1 i 2.
- Testirati značajnost prva dva obična autokorelaciona koeficijenta.

33

33

t	X_t	$X_t-\bar{X}$	$X_{t-1}-\bar{X}$	$X_{t-2}-\bar{X}$
1	13	-3	--	--
2	16	0	-3	--
3	18	2	0	-3
4	14	-2	2	0
5	11	-5	-2	2
6	10	-6	-5	-2
7	8	-8	-6	-5
8	16	0	-8	-6
9	20	4	0	-8
10	20	4	4	0
11	24	8	4	4
12	22	6	8	4
T=12	Zbir:192	Zbir:0		

34

t	$(X_t - \bar{X})^2$	$(X_t - \bar{X}) \quad (X_{t-1} - \bar{X})$	$(X_t - \bar{X}) \quad (X_{t-2} - \bar{X})$
1	9	--	--
2	0	0	--
3	4	0	-6
4	4	-4	0
5	25	10	-10
6	36	30	12
7	64	48	40
8	0	0	0
9	16	0	-32
10	16	16	0
11	64	32	32
12	36	48	24
T=12	**Zbir: 274**	**Zbir: 180**	**Zbir: 60**

35

$$\hat{\rho}_1 = \frac{\sum_{t=2}^{12}(X_t - \bar{X})(X_{t-1} - \bar{X})}{\sum_{t=1}^{12}(X_t - \bar{X})^2} = \frac{180}{274} = 0.657$$

$$\hat{\rho}_2 = \frac{\sum_{t=3}^{12}(X_t - \bar{X})(X_{t-2} - \bar{X})}{\sum_{t=1}^{12}(X_t - \bar{X})^2} = \frac{60}{274} = 0.219$$

$$s^2(\hat{\rho}_1) = s^2(\hat{\rho}_2) = \frac{1}{T} = \frac{1}{12} = 0.083 \Rightarrow \begin{cases} I\ s(\hat{\rho}_1) = 0.289 \\ II\ s(\hat{\rho}_2) = 0.289 \end{cases}$$

36

Ocena autokorelacionog koeficijenta	0.657	0.219
Standardna greška ocene	0.289	0.289
Interval poverenja (95% verovatnoća)	(-1.96*0.289, 1.96*0.289); (-0.566;0.566)	
Nulta hipoteza	H_0: ρ_1=0	H_0: ρ_2=0
Ispitivanje validnosti H_0	$0.657 \notin [\pm 0.566]$	$0.219 \in [\pm 0.566]$
Zaključak	H_0 se odbacuje.	H_0 se ne odbacuje.

37

Primer 2 I

- Na osnovu 164 podataka vremenske serije nulte srednje vrednosti i stabilne varijanse ocenjeni su sledeći autokorelacioni koeficijenti (redom na docnjama od 1 do 10):

$\hat{\rho}_1$	$\hat{\rho}_2$	$\hat{\rho}_3$	$\hat{\rho}_4$	$\hat{\rho}_5$	$\hat{\rho}_6$	$\hat{\rho}_7$	$\hat{\rho}_8$	$\hat{\rho}_9$	$\hat{\rho}_{10}$
-0.009	0.456	-0.069	-0.040	-0.073	-0.049	-0.062	-0.059	0.045	-0.038

- Da li se može smatrati da je vremenska serija proces beli šum?

38

38

Primer 2 II

- Vremenska serija nulte srednje vrednosti i stabilne varijanse je proces beli šum ukoliko njeni članovi nisu korelisani: autokorelacioni koeficijenti na docnjama različitim od nule su jednaki nula.
- Potrebno je proveriti valjanost nulte hipoteze $\boldsymbol{H_0}$: $\boldsymbol{\rho_k=0}$, protiv alternativne $\boldsymbol{H_1}$: $\boldsymbol{\rho_k \neq 0}$, $k=1,2,\dots,10$.
- Ukoliko se nulta hipoteza ne može odbaciti ni za jednu od prvih deset docnji, tada u vremenskoj seriji ne postoji značajna autokorelacija. To sugeriše adekvatnost belog šuma.
- Odgovarajući interval poverenja sa verovatnoćom 95% je

$$[-0.153; 0.153]$$

$$\hat{\rho}_2 = 0.456 \notin [-0.153; 0.153]$$

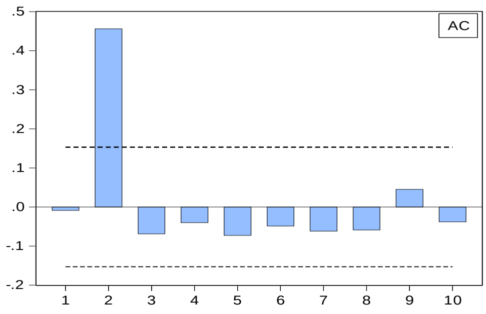
- Zaključujemo da vremenska serija nije beli šum.

39

39

Primer 2 III

- Grafički prikaz ocena autokorelacionih koeficijenata (korelogram) omogućava brzo zaključivanje.
- Napomena: isprekidane linije označavaju granice intervala poverenja uz verovatnoću 95%, $[-0.153; 0.153]$



40

40

Primer 3 I

- Prema periodu: prvi kvartal 2005 – četvrti kvartal 2019. godine ocenjeno je prvih pet običnih autokorelacionih koeficijenata za ***godišnju stopu rasta bruto domaćeg proizvoda Srbije***:

$\hat{\rho}_1$	$\hat{\rho}_2$	$\hat{\rho}_3$	$\hat{\rho}_4$	$\hat{\rho}_5$
0.772	0.533	0.301	0.128	0.068

- Kako se iz kvartalnih podataka obrazuje vremenska serija koja meri promene na godišnjem nivou i koja je predmet ove analize?
- Primenom Box-Ljungove test-statistike ispitati da li postoji značajna autokorelacija zbirnog reda pet.

41

41

Primer 3 II

- Predmet analize:

Vremenska serija $(1\text{-}L^4)LBDP_t = LBDP_t - LBDP_{t-4}$
LBDP označava logaritmovane vrednosti polaznih podataka

- Primenjuju se dve transformacije:
  - Podaci se logaritmuju
  - Određuje se diferenca reda 4 za logaritmovane vrednosti
- Diferenca reda četiri primenjena na logaritmovane kvartalne podatke meri međugodišnju stopu rasta

42

42

Primer 3 III

$\mathrm{H_0}: \rho_1 = \rho_2 = ... = \rho_m = 0, \mathrm{H_1}: \mathrm{H_0}$ nije tačno

$$BLj(m) = Q(m) = T(T+2)\sum_{i=1}^{m}\frac{\hat{\rho}_i^{\,2}}{T-i} : \chi_m^2$$

Polazni uzorak: 60 kvartala
Datom transformacijom gube se 4 podataka, tako da je: $T = 56$

$\mathrm{H_0}: \rho_1 = \rho_2 = ... = \rho_5 = 0, \mathrm{H_1}: \mathrm{H_0}$ nije tačno

$$Q(5) = 56 * 58 * \left[\frac{(0.772)^2}{(56-1)} + \frac{(0.533)^2}{(56-2)} + \frac{(0.301)^2}{(56-3)} + \frac{(0.128)^2}{(56-4)} + \frac{(0.068)^2}{(56-5)}\right]$$

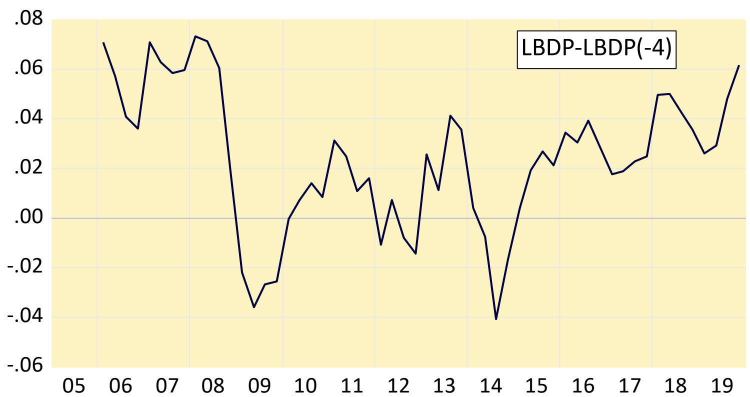
$Q(5) = 59.2 > \chi_5^2(0.05) = 11.07$
$\Rightarrow \mathrm{H_0}$ se odbacuje uz dati nivo značajnosti. **Postoji zbirna autokorelacija reda 5.**

43

43

Primer 3 IV

Grafički prikaz vremenske serije godišnja stopa rasta BDP-a (prvi kvartal, 2006 – četvrti kvartal, 2019)



44

44

Elementarne oznake u analizi vremenskih serija / detaljnije

1. X_t – vrednost (nivo) vremenske serije u periodu (trenutku) t.

Indeks t: sat, dan, nedelja, mesec, kvartal, godina,....

2. Operator docnje (operator kašnjenja) prvog reda L:

$$LX_t = X_{t-1}.$$

Trenutak u vremenu koji kasni jedan period za sadašnjim (tekućim) trenutkom: **docnja (kašnjenje) prvog reda**.

- Ako je sadašnji trenutak vremena t, onda $t-1$ označava docnju (kašnjenje) prvog reda.

- Ako je sadašnji trenutak vremena t, onda $t-2$ označava docnju (kašnjenje) drugog reda.

- U opštem slučaju: docnja k-tog reda je kašnjenje od k perioda.

Promenljive čije vrednosti registrujemo sa vremenskim pomakom jesu promenljive sa docnjama (promenljive sa kašnjenjem).

- X_{t-1} jeste vrednost promenljive sa docnjom prvog reda
- X_{t-2} je vrednost promenljive sa docnjom drugog reda
- X_{t-k} je vrednost promenljive sa docnjom k-tog reda.

Neka svojstava operatora L su:

$L^k X_t = X_{t-k}, k = 1, 2, ...$

$L^{-k} X_t = X_{t+k}, k = 1, 2, ...$

$L\mu = \mu$, gde je μ proizvoljna konstanta.

$L^0 X_t = X_t$.

$L^i(L^j X_t) = L^j(L^i X_t) \implies X_{t-j-i} = X_{t-i-j}$.

$L(\beta X_t) = \beta(LX_t) = \beta X_{t-1}$, gde je β proizvoljna konstanta.

3. Operator diference (operator razlike) prvog reda, Δ:

$$\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$$

Alternativni termini: prva diferenca, prva razlika ili **obična diferenca**.

Veza izmedju Δ i L:

$$\Delta = 1 - L \Longrightarrow \Delta X_t = (1-L)X_t = X_t - X_{t-1}$$

Prva diferenca za trenutak t:

$$\text{Trenuci}: \quad .... \quad t-1,\ t$$

$$\text{Promenljive}: \quad \underbrace{X_{t-1},\ X_t}_{\Delta X_t}$$

Prva diferenca za trenutak $t-1$:

$$\text{Trenuci}: .... \quad t-2,\ t-1,\ t$$

$$\text{Promenljive}: \quad \underbrace{X_{t-2},\ X_{t-1}}_{\Delta X_{t-1}}$$

Operator druge diference (ili diference drugog reda):

$$\begin{aligned}\Delta^2 X_t &= \Delta(\Delta X_t)\\ &= \Delta X_t - \Delta X_{t-1}\\ &= (X_t - X_{t-1}) - (X_{t-1} - X_{t-2})\\ &= X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}\end{aligned}$$

ili na drugi način:

$$\Delta^2 X_t = (1-L)^2 X_t = (1 - 2L + L^2) X_t = X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}$$

Česta transformacija

Prva diferenca logaritmovanih podataka date vremenske serije:
Kontinuelna stopa rasta.

Ova transformacija je aproksimativno jednaka diskretnoj stopi rasta (samo ako su razlike izmedju sukcesivnih podataka relativno male):

$$(X_t - X_{t-1})/X_{t-1} \approx \Delta \ln X_t = \ln X_t - \ln X_{t-1}$$

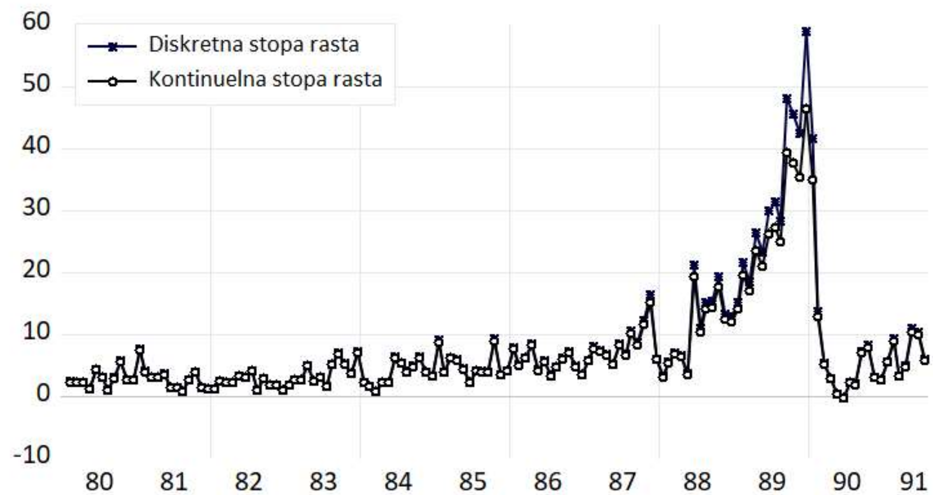
Primeri:

⋄ Mesečna inflacija: prva diferenca logaritmovanih mesečnih podataka indeksa potrošačkih cena ili indeksa troškova života.

⋄ Mesečna deprecijacija deviznog kursa: prva diferenca logaritmovanih podataka o nivou mesečnog deviznog kursa.

⋄ Dnevna stopa rasta prinosa fin. instrumenta: prva diferenca logaritmovanih dnevnih podataka o ceni finansijskog instrumenta.

Mesečna inflacija u Jugoslaviji, 1980:1–1991:7



4. Operator diference reda k, Δ_k:

$$\Delta_k X_t = X_t - X_{t-k}.$$

Uobičajeni termin: **operator sezonske diference**

Veza izmedju Δ_k i L:

$$\Delta_k = 1 - L^k \Longrightarrow \Delta_k X_t = (1 - L^k) X_t = X_t - X_{t-k}$$

Koristi se u analizi kvartalnih i mesečnih podataka sa izraženom sezonskom komponentom.

- $\Delta_4 X_t = X_t - X_{t-4}$ kod kvartalnih podataka
- $\Delta_{12} X_t = X_t - X_{t-12}$, kod mesečnih podataka.

Primer 1:

Pretpostavimo da raspolažemo sa kvartalnim podacima o kretanju bruto domaćeg proizvoda za tri godine:

Kvartal	I	II	III	IV
Godina 1.	$Q_{1,1}$	$Q_{1,2}$	$Q_{1,3}$	$Q_{1,4}$
Godina 2.	$Q_{2,1}$	$Q_{2,2}$	$Q_{2,3}$	$Q_{2,4}$
Godina 3.	$Q_{3,1}$	$Q_{3,2}$	$Q_{3,3}$	$Q_{3,4}$

Napomena: u opštem slučaju podatak $Q_{i,j}$ označava nivo u j-tom kvartalu i-te godine ($j = 1, 2, 3, 4$, $i = 1, 2, 3$).

Dalje:

$$\Delta Q_{2,2} = Q_{2,2} - Q_{2,1}$$

$$\Delta_4 Q_{2,2} = Q_{2,2} - Q_{1,2}$$

Uticaj sezonskih varijacija: uporedjujemo nivoe bruto domaćeg proizvoda u istim kvartalima različitih godina (podatke po kolonama u datoj tabeli).