- **Jednostavne nelinearne zavisnosti**

1

1

Uvod

- Primena metoda ONK zahteva da model bude linearan, što znači da parametri modela figurišu na linearan način (β_0 i β). Model ne mora da bude linearan po promenljivima (Y i X).
- Postoje jednostavne nelinearne forme koje su od interesa u ekonomskim analizama, a koje se jednostavnim transformacijama mogu prevesti na linearne.

2

2

Jednostavne nelinearne zavisnosti

- Dvojno-logaritamski model (log-log model)
- Eksponencijalni model (log-lin model)
- Inverzni model
- Polu-logaritamski model (lin-log model)

- Za svaki od modela:
  - Forma i grafički prikaz
  - Interpretacija parametra
  - Kako se dobijaju ocene marginalne zavisnosti i elastičnosti?

3

3

Dvojno-logaritamski model: forma

$$Y_i = \beta_o X_i^{\beta}$$

$$\ln Y_i = \ln \beta_o + \beta \ln X_i$$

$$\underbrace{\ln Y_i}_{Y_i^*} = \underbrace{\ln \beta_o}_{\beta_0^*} + \beta \underbrace{\ln X_i}_{X_i^*}$$

$$Y_i^* = \beta_0^* + \beta X_i^*$$

4

4

Dvojno-logaritamski model: interpretacija

$$Y_i = \beta_o X_i^{\beta} \Rightarrow$$

$$\frac{dY_i}{dX_i} = \beta_o \beta X_i^{\beta - 1} = \frac{\beta_o \beta X_i^{\beta}}{X_i} = \frac{\beta Y_i}{X_i}$$

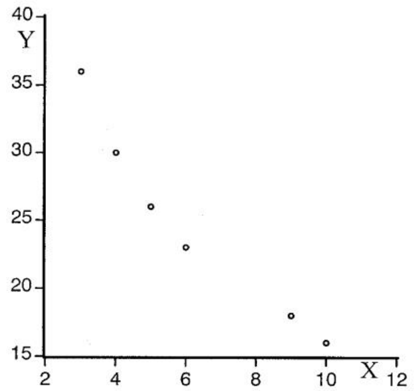
$$\Rightarrow \beta = \frac{dY_i}{dX_i}\frac{X_i}{Y_i} = \frac{dY_i / Y_i}{dX_i / X_i}$$

$$\beta = \frac{\textit{relativna} \text{ (procentualna) promena Y}}{\text{relativna (procentualna) promena X}}$$

5

5

Dvojno-logaritamski model: interpretacija II



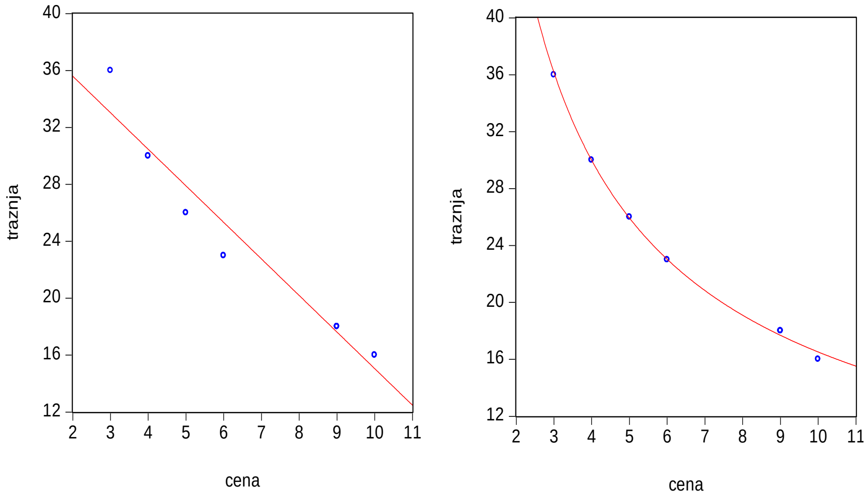
- *Y*: 16, 18, 23, 18, 26, 30, 36
- *X*: 10, 9, 6, 9, 5, 4, 3
- *Y* – tražnja, *X* - cena

- β je proporcionalna promena *Y* (%) koja je rezultat proporcionalne promene *X* (%).
- Ako se *X* promeni za 1% ,*Y* će se promeniti za β%.
- β je elastičnost *Y* u odnosu na *X*.
- Ocena: -0.65, cenovna elastičnost tražnje

6

6

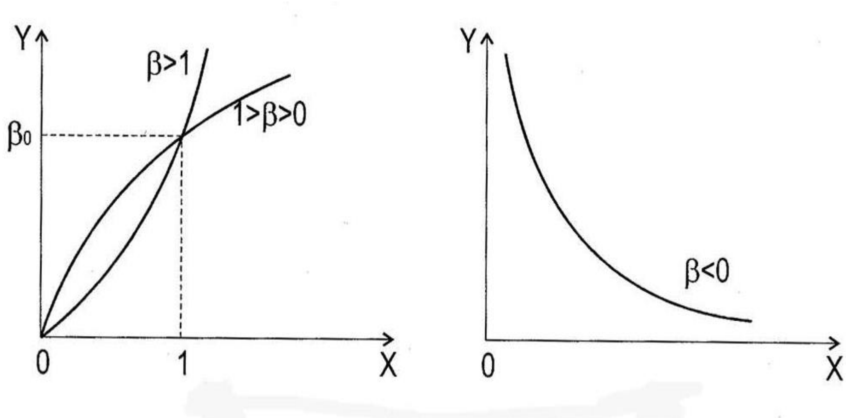
Jednostavni linearni model i log-log model na datom primeru: prilagodjene funkcije



7

7

Dvojno-logaritamski model: grafički prikaz



8

8

Intepretacija parametra nagiba u linearnom i log-log modelu

Model	Forma	Parametar marginalne zavisnosti dY_i/dX_i	Parametar elastičnosti $\left(dY_i/dX_i\right)\frac{X_i}{Y_i}$
Linearni	$Y_i = \beta_0 + \beta X_i + \varepsilon_i$	*Konstantan* β	
Log-log model	$Y_i = \beta_o X_i^{\beta} e^{\varepsilon_i}$		*Konstantan* β

9

Intepretacija parametra nagiba u linearnom i log-log modelu II

Model	Forma	Parametar marginalne zavisnosti dY_i/dX_i	Parametar elastičnosti $\left(dY_i/dX_i\right)\frac{X_i}{Y_i}$
Linearni	$Y_i = \beta_0 + \beta X_i + \varepsilon_i$	*Konstantan* β	Promenljiv $\beta X_i / Y_i$
Log-log model	$Y_i = \beta_o X_i^{\beta} e^{\varepsilon_i}$	Promenljiv $\beta Y_i / X_i$	*Konstantan* β

10

Rezultati ocenjivanja za polazne podatke

Model	Ocena parametra margin. zavisnosti	Ocena parametra elastičnosti
$Y_i = \beta_0 + \beta X_i + \varepsilon_i$	-2.569	$\beta \overline{X} / \overline{Y} = -0.708$ $-2.569 \cdot 6.571 / 23.857$
$lnY_i = \beta_0^* + \beta \, ln X_i + \varepsilon_i$	$\beta \overline{Y} / \overline{X} = -2.364$ $-0.651 \cdot 23.857 / 6.571$	-0.651

11

Eksponencijalni model
Logaritamsko-linearni model: forma

$$Y_i = \beta_o e^{\beta X_i}$$

$$lnY_i = ln\,\beta_o + \beta X_i$$

$$\underbrace{lnY_i}_{Y_i^*} = \underbrace{ln\,\beta_o}_{\beta_o^*} + \beta X_i$$

$$Y_i^* = \beta_o^* + \beta X_i$$

13

13

Logaritamsko-linearni model: interpretacija

$$lnY_i = \beta_o + \beta X_i$$

$$\Rightarrow \frac{d\,lnY_i}{dX_i} = \beta$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{dY_i / Y_i}{dX_i}$$

$$\beta = \frac{\textit{relativna}\text{ (procentualna) promena Y}}{\text{apsolutna promena X}}$$

14

14

Logaritamsko-linearni model: interpretacija II

- Ako se X promeni za 1 jedinicu, Y se promeni za procentualni iznos od 100β.
- Parametar nagiba je polu-elastičnost.
- Značajna primena
  Modeli u kojima *X* uzima vrednosti 1,2,....

15

15

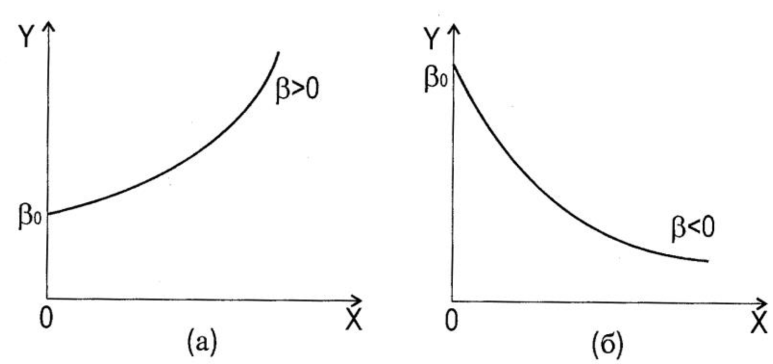
Logaritamsko-linearni model: interpretacija III

- <u>Modeli vremenskih serija</u>
  Ako je *X* linearni trend (1,2,...), a *Y* ekonomska veličina merena recimo na godišnjem nivou, onda je 100β *godišnja stopa rasta (pada) te ekonomske veličine.*
- <u>Modeli podataka preseka</u>
  Jednačina plata kojom se plate (*Y*) opisuju u funkciji od godina školovanja (*X*): 100β *označava rast plata koji je rezultat dodatne godine obrazovanja.*

16

16

Logaritamsko-linearni model: grafički prikaz



17

17

Logaritamsko-linearni model: interpretacija III

- Ako je *X* linearni trend (t=1,2,...), a *Y* ekonomska veličina merena na godišnjem nivou, onda je 100β *godišnja stopa rasta (pada) te ekonomske veličine*.

$$lnY_t = \beta_0^* + \beta t,\ t = 1,2,...$$

$$lnY_{t-1} = \beta_0^* + \beta(t-1)$$

$$\Rightarrow \underbrace{lnY_t - lnY_{t-1}}_{\substack{aproksimacija\\ stope\ rasta}} = \beta$$

$$\Rightarrow\approx \frac{Y_t - Y_{t-1}}{Y_{t-1}} = \beta$$

18

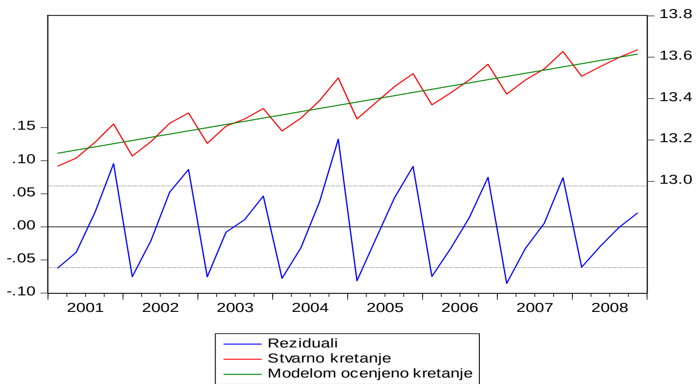
18

Logaritamsko-linearni model: primer

- Na osnovu kvartalnih podataka u periodu 2001:1-2008:4 ocenjen je sledeći model zavisnosti za BDP privrede Srbije:

$$\ln BDP_t = 13.14 + 0.0154t + rezidual.$$

- Kvartalna stopa rasta procenjena je na 1.54%



19

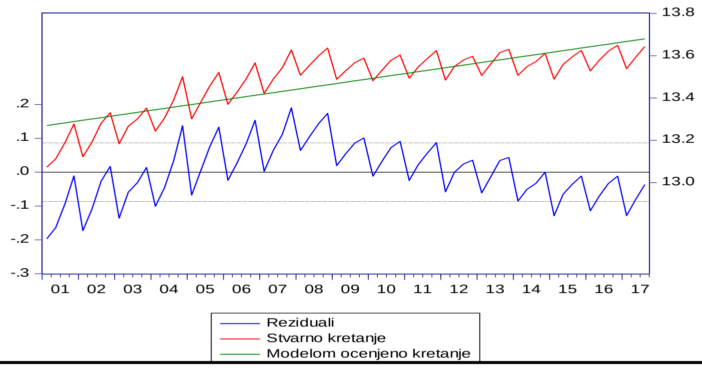
19

Logaritamsko-linearni model: primer I

- Na osnovu kvartalnih podataka u periodu 2001:1-2017:3 ocenjen je sledeći model zavisnosti za BDP privrede Srbije:

$$\ln BDP_t = 13.27 + 0.0062t + rezidual$$

- Kvartalna stopa rasta procenjena je na 0.62%, ali je rezultat nepouzdan zbog nehomogenosti perioda.



20

20

Logaritamsko-linearni model: Kaganova funkcija tražnje za novcem

$mr = \beta_o e^{-\alpha\pi^e}, \quad \alpha > 0$

$\ln(mr) = \ln(\beta_o)\ \text{-}\alpha\pi^e$

mr – traznja za novcem,

π^e – očekivana inflacija

$\alpha \rightarrow$ polu-elastičnost tražnje za novcem

$\frac{1}{\alpha} \rightarrow$ NIVO INFLACIJE PRI KOJOJ SE MAKSIMIZIRA PRIHOD OD EMISIJE NOVCA; TO JE MAKSIMUM LAFEROVE KRIVE

- Ovo je elementarni model tražnje za novcem u uslovima visoke inflacije i hiperinflacije
- Što je vrednost polu-elastičnosti veća:
  - to je tražnja za novcem osetljivija na dalje ubrzavanje inflacije
  - to se maksimalni inflacioni prihod ostvaruje pri nižim stopama inflacije.

21

21

Logaritamsko-linearni model: Kaganova funkcija tražnje za novcem II

- Petrović and Mladenović (2000), *Journal of Money, Credit and Banking* *Modifikacija za uslove hiperinflacije*
  - Umesto stope inflacije koristi se stopa deprecijacije deviznog kursa
  - Tražnja za novcem, koja se obrazuje kao količnik novčane mase i indeksa cena, formira se uz upotrebu deviznog kursa umesto cena
  - Model ovog tipa bolje objašnjava uslove hiperinflacije u Srbiji od klasičnog Kaganovog modela na osnovu mesečnih podataka u periodu 1991:1-1994:1.

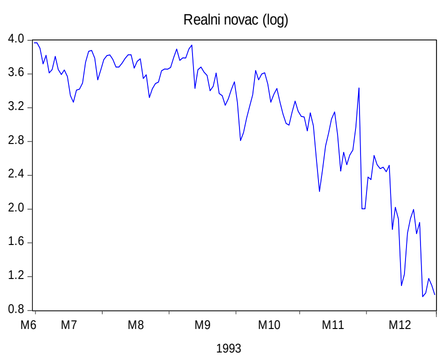
- Mladenović and Petrović (2010), *Journal of International Money and Finance*
  - Ocena modela prema dnevnim podacima za period ekstremne hiperinflacije u Srbiji pokazala je da je hiperinflacija trajala relativno dugo zato što je država ubirala rastuće prihode od emisije novca za dugi period vremena.

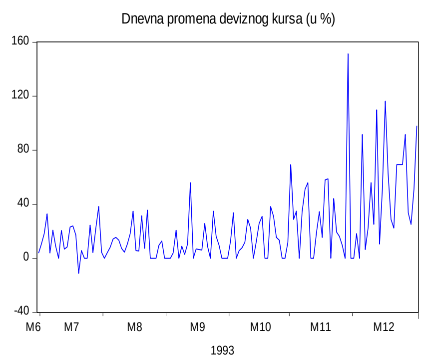
22

22

Logaritamsko-linearni model: Kaganova funkcija tražnje za novcem III

- Podaci iz Mladenović and Petrović (2010)





23

23

Inverzni model: forma

$$Y_i = \beta_o + \frac{\beta}{X_i}$$

$$Y_i = \beta_o + \beta \frac{1}{X_i}$$

$$X_i^*$$

$$Y_i = \beta_o + \beta X_i^*$$

24

24

Inverzni model: interpretacija

$$Y_i = \beta_o + \frac{\beta}{X_i}$$

$$\Rightarrow \frac{dY_i}{dX_i} = -\frac{\beta}{X_i^2}$$

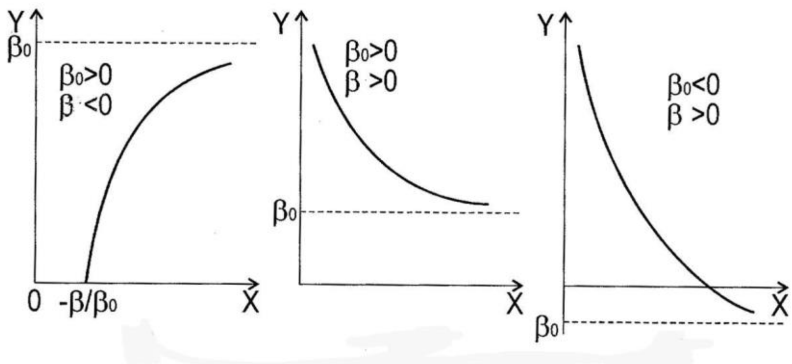
$$\Rightarrow dY_i = -\frac{\beta}{X_i}\frac{dX_i}{X_i}$$

- Ako se *X* promeni za 1%, *Y* se promeni za apsolutni iznos od 0.0β *po jedinici X*.
- Postoji asimetrična reakcija *Y* u zavisnosti od nivoa *X*.
- Pri nižim vrednostima X, njegova procentualna promena dovodi do oštrije reakcije *Y*, nego kada se pri višim vrednostima *X* menja.

25

25

Inverzni model: grafički prikaz



$$\frac{dY_i}{dX_i} = -\frac{\beta}{X_i^2} \quad \Rightarrow \begin{cases} f-ja \uparrow \text{ za } \beta < 0 \\ f-ja \downarrow \text{ za } \beta > 0 \end{cases}$$

26

26

Inverzni model: primeri

- Levi grafik: Engelova kriva potrošnje
  - (Y – potrošnja određenog proizvoda, X – dohodak)
  - Ispod izvesnog nivoa dohotka potrošnja nije moguća.
  - Postoji saturacioni nivo potrošnje: nezavisno od nivoa dohotka potrošnja se ne ostvaruje iznad gornjeg praga.
- Desni grafik: Filipsova kriva
  - (Y – stopa rasta plata, X –stopa nezaposlenosti)
  - Postoji asimetrična reakcija plata na promenu nezaposlenosti na različitim nivoima nezaposlenosti.
  - Ako je nivo nezaposlenosti ispod prirodne stope (presek krive sa x-osom), tada jedinična promena nezaposlenosti dovodi do snažnije reakcije plata nego kada je nezaposlenost iznad prirodnog nivoa (X veće od tačke preseka krive sa x-osom).

27

27

Polu-logaritamski model
Linearno-logaritamski model: forma

$$Y_i = \beta_o + \beta \ln X_i$$

$$Y_i = \beta_o + \beta \ln X_i$$

$$X_i^*$$

$$Y_i = \beta_o + \beta X_i^*$$

28

28

Linearno-logaritamski model: interpretacija

$$Y_i = \beta o + \beta \, ln \, X_i$$

$$\Rightarrow \frac{dY_i}{d \, ln \, X_i} = \beta$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{dY_i}{d \, ln \, X_i} = \frac{dY_i}{dX_i / X_i}$$

$$\beta = \frac{\text{apsolutna promena Y}}{\text{relativna (procentualna) promena X}}$$

$$\Rightarrow \frac{dY_i}{dX_i} = \frac{\beta}{X_i}$$

29

29

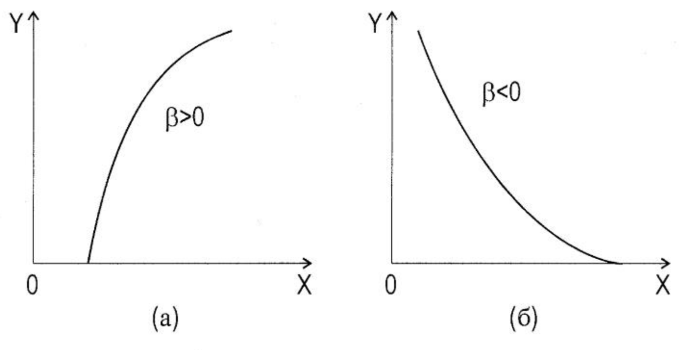
Linearno-logaritamski model: interpretacija

- Ako se X promeni za 1%, Y se promeni za apsolutni iznos od 0.0β *jedinica*.
- Ako je parametar nagiba pozitivan, tada Y sporije raste od rasta X.
  - Tražnja za trajnim potrošnim dobrima
  - Profit u zavisnosti od uloženog kapitala

30

30

Linearno-logaritamski model: grafički prikaz



$$\frac{dY_i}{dX_i} = \frac{\beta}{X_i} \quad \Rightarrow \begin{cases} f-ja \uparrow \ \text{za } \beta > 0 \\ f-ja \downarrow \ \text{za } \beta < 0 \end{cases}$$

31

31

Rezime upotrebe modela I

Model	Forma	Parametar marginalne zavisnosti dY_i / dX_i	Parametar elastičnosti $(dY_i/dX_i)\frac{X_i}{Y_i}$
Linearni	$Y_i = \beta_0 + \beta X_i + \varepsilon_i$	Konstantan β	Promenljiv $\beta X_i / Y_i$
Log-log model	$ln Y_i = \beta_o^* + \beta ln X_i + \varepsilon_i$	Promenljiv $\beta Y_i / X_i$	Konstantan β
Log-lin model	$ln Y_i = \beta_o^* + \beta X_i + \varepsilon_i$	Promenljiv βY_i	Promenljiv βX_i

32

Rezime upotrebe modela II

Model	Forma	Parametar marginalne zavisnosti dY_i / dX_i	Parametar elastičnosti $(dY_i/dX_i)\frac{X_i}{Y_i}$
Inverzni model	$Y_i = \beta_o + \frac{\beta}{X_i} + \varepsilon_i$	Promenljiv $-\beta / X_i^2$	Promenljiv $-\beta / X_i Y_i$
Lin-log model	$Y_i = \beta_o + \beta \ln X_i + \varepsilon_i$	Promenljiv β / X_i	Promenljiv β / Y_i

33