Analiza vremenskih serija

Zorica Mladenović

1

Struktura

- Uvodne napomene
- Vremenska serija i slučajan proces
- Stacionarnost i osnovni modeli
- Uzroci nestacionarnosti. Jedinični koren
- Relevantnost prisustva jediničnog korena i regresiona analiza nestacionarnih vremenskih serija
- Test jediničnog korena
- Kointegracija
- Test kointegracije

2

Vrste podataka

- Podaci vremenskih serija
  - Godišnji, kvartalni mesečni, dnevni, kako se obavi transakcija.
- Podaci preseka (strukture)
  - Vrednosti različitih promenljivih koje definišu strukturu u datom trenutku vremena.
- Podaci panela
  - Kombinacija podataka vremenskih serija i podataka preseka.

3

Osnovno svojstvo vremenske serije: autokorelacija

- Vremenska serija je niz podataka koji je uređen u odnosu na vreme
- To uređenje se obično ostvaruje u jednakim vremenskim intervalima: godina, mesec, dan, čas,...
- Primer: podatak o indeksu cena u aprilu 2020. dolazi nakon podatka o datom indeksu u prethodnom mesecu, martu 2020.
  - Uključivanjem novih podataka proširuje se dati niz, dok se postojeći redosled u nizu ne menja.

4

Osnovno svojstvo vremenske serije: autokorelacija (II)

- Uobičajena notacija: X_t, t=1,2,…,T
  - t – linearni trend: indeks koji uzima vrednosti od 1 to T i T je ukupan broj podataka (obim uzorka)
  - Skraćenica za skup opservacija: $X_1, X_2, \ldots, X_T$.
- Vrlo je verovatno da X_{t-1} (bar delimično) određuje nivo X_t: ima smisla analizirati X_{t-1} pre nego što se pristupi analizi X_t.
  - Podaci tokom vremena su korelisani.
  - Korelisanost tokom vremena se uobičajeno naziva **autokorelacija.**
- **Osnovni svrha analize vremenskih serija: otkriti tip autokorelacije u datoj vremenskoj seriji.**

5

Osnovna razlika između ekonometrijskog i pristupa analize vremenskih serija

- Standardni ekonometrijski pristup:

  $Y=f(X_1, X_2,\ldots)$, gde su $X_1, X_2,\ldots$ promenljive koje sugeriše ekonomska teorija.

- Pristup analize vremenskih serija:

  $Y_t=f(Y_{t-1}, Y_{t-2},\ldots)$

  - Ignorišu se objašnjavajuće promenljive koje sugeriše teorija
  - Ono što se dešavalo sa Y_t u prošlosti je dovoljno za modeliranje.
  - Uobičajeni termin za t-1, t-2, itd., je docnja prvog reda, docnja drugog reda i sl.

6

Slučajan proces i vremenska serija

- Slučajan proces: niz slučajnih promenljivih koje su uređene u odnosu na vreme
- Uobičajena oznaka:

$$X_1, X_2, \ldots$$
$$X_t, t = 1, 2, \ldots$$

- Vremenska serija:
  - I koncept: jedna realizacija slučajnog procesa
  - II koncept: ne postoji razlika između vremenske serije i slučajnog procesa
- **Termine koristimo kao sinonime: vremenski niz slučajnih promenljivih.**

7

Stacionarnost I

- Stacionarnost vremenske serije: vremenska serija se kreće po prepoznatljivoj putanji tokom vremena
- Dva koncepta: stroga i slaba stacionarnost
- Definicija slabe stacionarnosti:

$$1.\ E(X_t) = \mu = const,\ t = 1,2,\ldots$$
$$2.\ v(X_t) = E(X_t - \mu)^2 = const,\ t = 1,2,\ldots$$
$$3.\ cov(X_t, X_{t-k}) = E(X_t - \mu)(X_{t-k} - \mu) = f(k),\ t = 1,2,\ldots,\ k = 1,2,\ldots$$

8

Stacionarnost II

- Očekivana vrednost i varijansa slabo stacionarne vremenske serije su invarijantne u odnosu na vreme. Transliranjem u vremenu ove dve veličine se **ne** menjaju.
- Kovarijansa između članova vremenske serije zavisi samo od rastojanja (docnje), a ne od vremenskog trenutka. To znači da je za datu docnju *k* kovarijansa ista:

$$\operatorname{cov}\left(X_t, X_{t-k}\right) = const, \text{za dato k i t} = 1,2,\ldots$$

9

Najjednostavniji primer stacionarne vremenske serije: beli šum (engl. white noise)

$$E(\varepsilon_t) = 0,\ t = 1,2,\ldots$$
$$v(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t)^2 = \sigma^2 = const,\ \mathbf{t = 1,2,\ldots}$$
$$cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}) = E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-k}) = 0,\ \mathbf{t = 1,2,\ldots,\ k = 1,2,\ldots}$$

- Niz nekorelisanih slučajnih promenljivih nulte srednje vrednosti i stabilne varijanse

10

Gausov beli šum

$$E(\varepsilon_t) = 0,\ t = 1,2,...$$

$$v(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t)^2 = \sigma^2 = const,\ \mathbf{t = 1,2,...}$$

Članovi vremenske serije su nezavisne sl. promenljive $\Rightarrow$

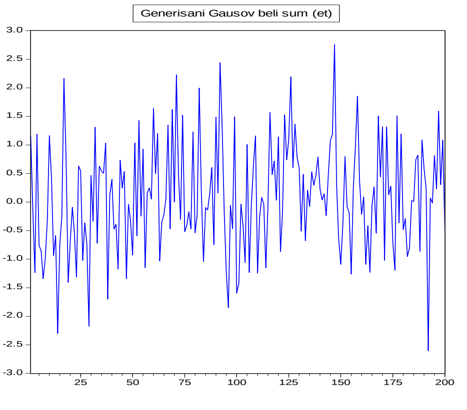
$$cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}) = E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-k}) = 0,\ \mathbf{t = 1,2,...,\ k = 1,2,...}$$

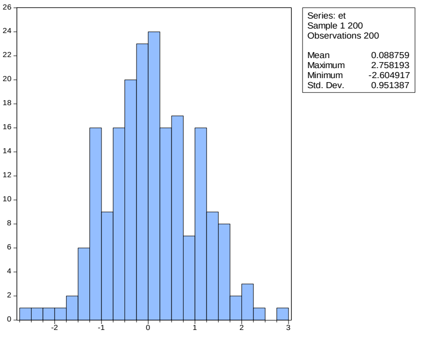
$$\varepsilon_t : \mathrm{N}\left(0, \sigma^2\right),\ t = 1,2,...$$

- Niz nezavisnih slučajnih promenljivih koje su normalno raspodeljene sa nultom srednjom vrednošću i stabilnom varijansom

11

Gausov beli šum: grafički prikaz

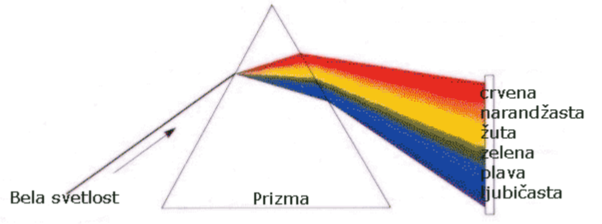




12

Beli šum - dodatno

- Bela svetlost – disperzijom kroz kristalnu prizmu dobijaju se osnovne boje spektra koje se javljaju sa jednakim ponderom
- Spektar bele svetlosti: komponente na nižim i višim frekvencijama imaju identičan udeo.



13

Osnovni modeli stacionarnih vremenskih serija

- Autoregresioni modeli (AR)
- Modeli pokretnih sredina (PS, engl. MA)
- Autoregresioni modeli pokretnih sredina (ARPS, engl. ARMA)

14

Opšte forme modela stacionarnih vremenskih serija

- AR(p) model

$$X_t = \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \ldots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t$$

- PS(q) model

$$X_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \ldots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

- ARPS(p,q) model

$$X_t = \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \ldots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \ldots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

- Parametri modela su:

$$\phi_0, \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q$$

15

Jednostavni modeli:

- AR(1): $X_t = \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t$
- AR(2): $X_t = \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t$
- PS(1): $X_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$
- PS(2): $X_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2}$
- ARPS(1,1): $X_t = \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$
- ARPS(2,1): $X_t = \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1}$

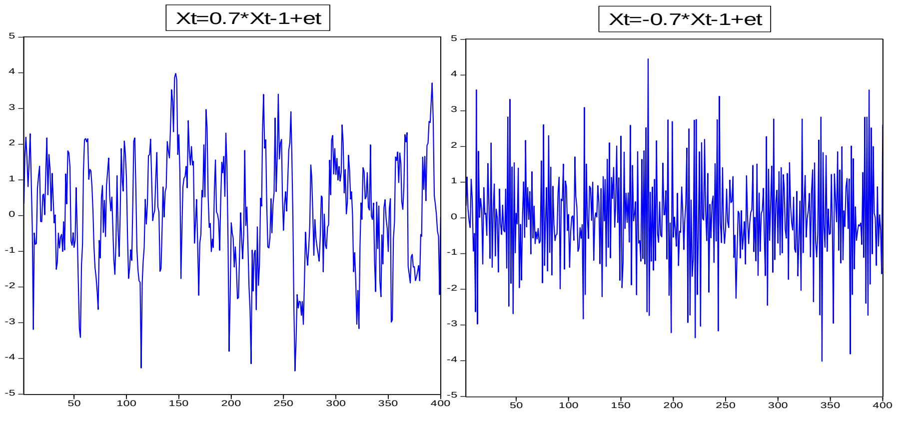
16

Značaj modela

- Nisu opterećeni postavkama ekonomske teorije
- Jednostavni su za ocenjivanje, jer obično ne sadrže veliki broj parametara
- Pouzdani za prognoziranje budućeg kretanja vremenske serije za horizont predviđanja do godine dana

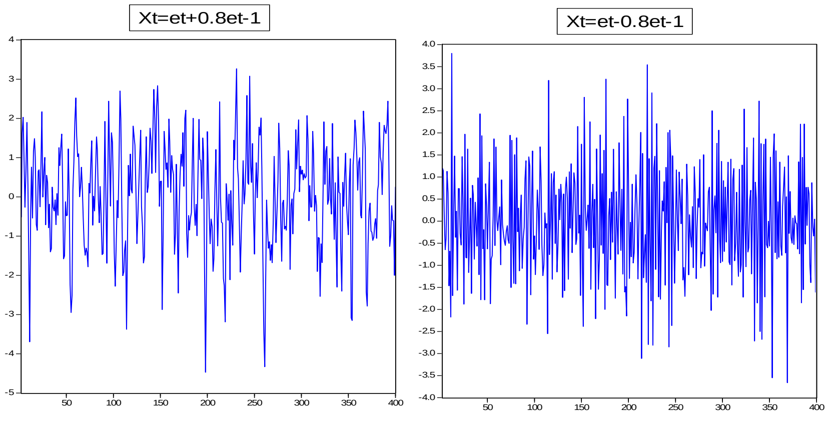
17

Primer AR(1) modela



18

Primer PS(1) modela



19

Uslov stacionarnosti kod AR(1) modela: autoregresioni parametar je po modulu strogo manji od jedan, $|\phi_1| < 1$

$$
\begin{aligned}
X_t &= \phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t \\
&= \phi_1 \left[\phi_1 X_{t-2} + \varepsilon_{t-1}\right] + \varepsilon_t \\
&= \phi_1^2 \left[\phi_1 X_{t-3} + \varepsilon_{t-2}\right] + \varepsilon_t + \phi_1 \varepsilon_{t-1} \\
&= \ldots \\
&= \varepsilon_t + \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \phi_1^2 \varepsilon_{t-2} + \phi_1^3 \varepsilon_{t-3} + \ldots + \phi_1^{t-1} \varepsilon_1 + \phi_1^t \underbrace{X_0}_{inicijalna}
\end{aligned}
$$

$$v(X_t) = v\left(\varepsilon_t + \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \phi_1^2 \varepsilon_{t-2} + \phi_1^3 \varepsilon_{t-3} + \ldots + \phi_1^{t-1} \varepsilon_1\right) = \sigma^2 \left(1 + \phi_1^2 + \phi_1^4 + \phi_1^6 + \ldots\right)$$

Da bi varijansa bila konacna, neophodno je da vazi $|\phi_1| < 1$. *Tada je:*

$$v(X_t) = \sigma^2 \underbrace{\left(1 + \phi_1^2 + \phi_1^4 + \phi_1^6 + \ldots\right)}_{\frac{1}{1-\phi_1^2}} = \frac{\sigma^2}{1-\phi_1^2}.$$

20

Šta se dešava za $|\phi_1| = 1$?

$$X_t = X_{t\text{-}1} + \varepsilon_t$$

$$X_t = \varepsilon_t + \phi_1\varepsilon_{t-1} + \phi_1^2\varepsilon_{t-2} + \phi_1^3\varepsilon_{t-3} + \ldots + \phi_1^{t-1}\varepsilon_1 + \phi_1^t X_0$$

$$X_t = \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_{t-3} + \ldots + \varepsilon_1 + X_0 = X_0 + \sum_{j=1}^{t}\varepsilon_j$$

$$v(X_t) = v\left(\varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_{t-3} + \ldots + \varepsilon_1\right) = t\sigma^2 = f(t).$$

Vremenska serija je nestacionarna!!!

21

Najjednostavnija nestacionarna v. serija: slučajan hod (klasičan)

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t \quad \Leftrightarrow X_t = X_0 + \sum_{j=1}^{t}\varepsilon_j$$

$$\mathrm{E}(X_t) = X_0,\ \mathrm{v}(X_t) = t\sigma^2$$

$$\underbrace{X_t - X_{t-1}}_{\Downarrow} = \varepsilon_t$$

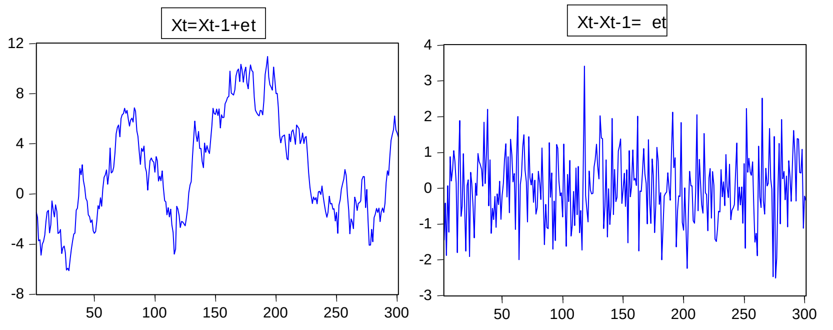
$$\Delta X_t = \varepsilon_t$$

$$\mathrm{E}(\Delta X_t) = 0,\ \mathrm{v}(\Delta X_t) = \mathrm{v}(\varepsilon_t) = \sigma^2$$

- Prva diferenca serije je stacionarna.

22

Klasičan slučajan hod: grafički prikaz



23

Alternativni termini za slučajan hod

- Vremenska serija sa stohastičkim trendom
- Integrisano-stacionarna vremenska serija
- Vremenska serija sa jediničnim korenom

24

Alternativni termini:
Vremenska serija sa stohastičkim trendom

- Na osnovu informacije o prethodnom kretanju vremenske serije ne možemo predvideti njeno kretanje u budućnosti. U suprotnom, kada bi trend bio deterministički, tada bi i prognoza bila pouzdana.

25

Alternativni termini II:
Integrisano-stacionarna vremenska serija

- Vremenska serija dobija se na osnovu zbira članova belog šuma.
- Operaciji sabiranja u diskretnom prostoru odgovara postupak integraljenja neprekidnih veličina.
- Reč je o integrisanom procesu prvog reda, gde red 1 pokazuje koliko puta treba diferencirati seriju da bi se dobila njena stacionarna reprezentacija.
- Ako je prva diferenca stacionarna, tada je vremenska serija integrisana reda 1. Oznaka: $X_t \sim I(1)$.
- Za stacionarnu vremensku seriju kažemo da je integrisana reda 0.
  - Beli šum: $\varepsilon_t \sim I(0)$.
  - Prva diferenca serije $X_t \sim I(1)$: $\Delta X_t \sim I(0)$.

26

Alternativni termini III:
Vremenska serija sa jediničnim korenom

- AR(1) model:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t$$
$$X_t - \phi_1 X_{t-1} = \varepsilon_t$$

- Pridružuje se jednačina čije je rešenje (koren) *g*:

$$g - \phi_1 = 0 \Rightarrow g = \phi_1$$
$$\text{Za } \phi_1 = 1, \text{ koren je jedan.}$$

- Otuda potiče naziv jedinični koren.
- Broj jediničnih korena odgovara nivou integrisanosti vremenske serije, odnosno broju postupaka diferenciranja potrebnih za stacionarnu reprezentaciju vremenske serije.

27

Rezime uvedenih termina

Ako vremenska serija ima ***d*** jediničnih korena, onda je ona integrisana reda ***d***, i treba je diferencirati ***d*** puta da bi se obezbedila njena stacionarna reprezentacija.

$$\boxed{\begin{gathered} \textit{Serija ima d jedinicnih korena} \\ \Leftrightarrow X_t \sim I(d) \Leftrightarrow \Delta^d X_t \sim I(0) \end{gathered}}$$

28

Digresija o diferenci vremenske serije

- Prva diferenca primenjena jednom:

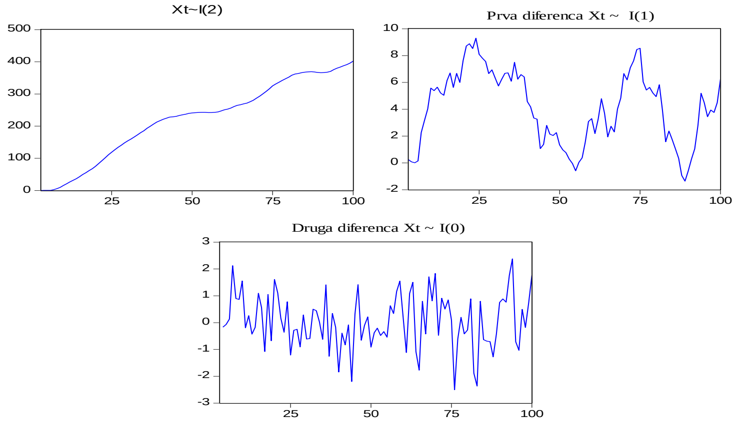
$$\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$$

- Prva diferenca primenjena dva puta, druga diferenca:

$$\Delta^2 X_t = \Delta\Delta X_t = \underbrace{\Delta X_t}_{(X_t - X_{t-1})} - \underbrace{\Delta X_{t-1}}_{(X_{t-1} - X_{t-2})} = X_t - 2X_{t-1} + X_{t-2}$$

29

Kako izgleda vremenska serija sa dva jedinična korena?



30

Dva tipa slučajnog hoda

Naziv	Forma	$E(\Delta Xt)$
Slučajan hod *klasični*	$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$	*0*
Slučajan hod *sa konstantnim prirastom*	$X_t = X_{t-1} + \beta + \varepsilon_t$	β

31

Slučajan hod sa konstantnim prirastom

$$X_t = \beta + X_{t-1} + \varepsilon_t, \mathbf{E}(\varepsilon_t) = 0, \mathbf{v}(\varepsilon_t) = \sigma^2, \mathbf{E}(\varepsilon_t \varepsilon_{t-k}) = 0, \mathbf{k} \neq 0.$$

$\beta > 0$, **konstantni prirast**

$$X_t = \beta + \underbrace{X_{t-1}}_{\beta + X_{t-2} + \varepsilon_{t-1}} + \varepsilon_t$$

$$X_t = 2\beta + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} + X_{t-2} = \ldots = \beta t + \underbrace{\varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} + \ldots + \varepsilon_1}_{\mathbf{t}} + X_0$$

$$X_t = X_0 + \beta t + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} + \ldots + \varepsilon_1$$

$t = 1, X_1 = X_0 + \beta + \varepsilon_1,$

$t = 2, X_2 = X_0 + 2\beta + \varepsilon_2 + \varepsilon_1,$ **itd.**

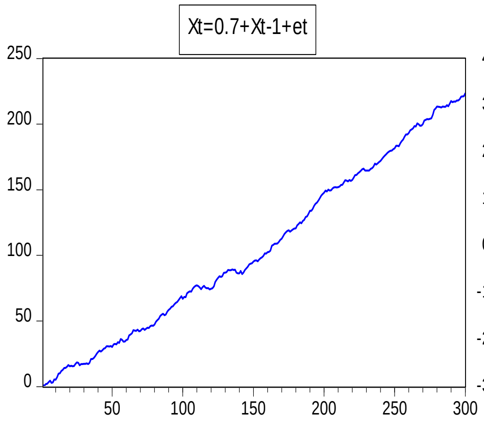
Deterministicka komponenta svakog narednog clana vremenske serije se uvecava za vrednost β

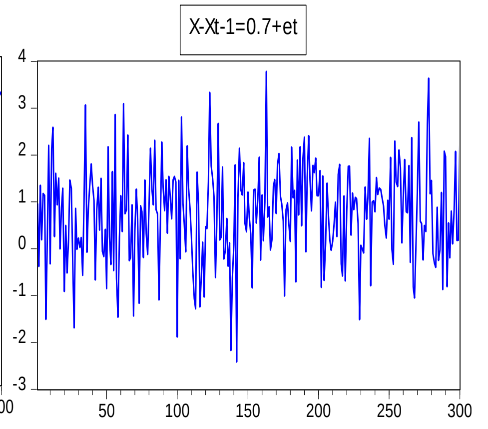
Primenom operatora prve diference eliminise se nestacionarnost :

$$\Delta X_t = \beta + \varepsilon_t, \mathbf{E}(\Delta X_t) = \beta, \mathbf{v}(\Delta X_t) = \mathbf{v}(\varepsilon_t) = \sigma^2.$$

32

Slučajan hod sa konstantnim prirastom: grafički prikaz generisanih podataka





33

Zašto je važno utvrditi prisustvo jediničnog korena?

- Postoje dva osnovna razloga koji čine relevantnom podelu na stacionarne i nestacionarne veličine
  - Statistički
  - Ekonomski

34

Statistički razlozi

- Primena standardne statističke procedure i metoda ONK nepouzdana je u regresionoj analizi vremenskih serija sa jediničnim korenom.
  - Ocene parametara su pristrasne i nekonzistentne.
  - Ocene parametara nemaju normalnu raspodelu. To znači da statističko zaključivanje zasnovano na t-odnosu i F-testu značajnosti koeficijenta determinacije nije tačno.
  - Moguća je pojava *besmislene regresije*. Ovim pojmom označava se regresija sa visokim vrednostima koeficijenta determinacije i t-odnosa (po modulu) između vremenskih serija sa jediničnim korenom, ali koje su potpuno nezavisne.

35

Značajna istraživanja

- Yule (1926)
  - Empirijska analiza; Udeo broja brakova sklopljenih u Engleskoj crkvi u odnosu na ukupan broj i mortalitet na 1000 osoba prema godišnjim podacima Engleske i Velsa u periodu: 1866-1911. (R2=**0.91**)
- Granger and Newbold (1974)
  - Simulaciona analiza
- Hendry (1980)
  - Empirijska analiza; Inflacija i kumulisana količina padavina u V. Britaniji prema kvartalnim podacima u periodu: 1964-1975. (R2=**0.99**)
- Phillips (1986)
  - TEORIJSKI DOKAZI

36

Ekonomski razlozi

- Razlika između vremenske serija sa i bez jediničnog korena ima jasnu ekonomsku implikaciju:
  - Uticaj slučajnih šokova na nivo stacionarne vremenske serije slabi tokom vremena
  - Efekat šoka na nivo vremenske serije sa jediničnim korenom ima trajno dejstvo za neodređeni period vremena.
- Ova razlika posebno dolazi do izražaja u teoriji poslovnih ciklusa: ako vremenska serija BDP sadrži jedinični koren, tada njeno odstupanje od dugoročnog trenda neće biti povremeno, kako naglašava tradicionalna teorija, već permanentno za neodređeni period vremena.
- Prisustvo jediničnog korena sugeriše da negativni šokovi iz faze recesije mogu trajno redukovati nivo BDP.

37

Ekonomski razlozi: pionirski rad

- Nelson and Plosser(1982), *Journal of Monetary Economics*
  - Jedan od prvih radova provere postojanja jediničnih korena u makroekonomskim veličinama
  - Realni i nominalni BDP privrede SAD poseduju jedinični koren
  - Ukupno je posmatrano 14 vremenskih serija i u većini je detektovano prisustvo jediničnog korena
  - Godišnji podaci u periodu: 1860.(1909.) – 1970.

38

Slučajan hod u ekonomskim analizama: analiza efikasnosti finansijskog tržišta

- Koncept (slabe) efikasnosti finansijskog tržišta: prethodno kretanje stopa prinosa finansijskih instrumenata ne utiče na njihovo buduće kretanje.
- Na efikasnom finansijskom tržištu cene u svakom trenutku inkorporiraju sve faktore na strani ponude i potražnje, pa se menjaju samo sa pojavom nove vesti.
- Koncept efikasnog tržišta čini model slučajnog hoda relevantnim za opisivanje kretanja logaritma cena finansijskih instrumenata:

$$ln P_t = ln P_{t-1} + \varepsilon_t \Rightarrow ln P_t - ln P_{t-1} = \Delta ln P_t = \varepsilon_t$$

- Ukoliko logaritam cena prati putanju slučajnog hoda, tada je odgovarajuća stopa prinosa (prva diferenca logaritma datih cena) jednaka procesu beli šum. To znači da do promene cena dolazi slučajno, i to isključivo kao rezultat nove informacije. Tada možemo smatrati da je finansijsko tržište efikasno.

39

Slučajan hod u ekonomskim analizama: analiza dostignutog stepena konvergencije

- **Teorija privrednog rasta**: nivoi BDP *per capita* u dve zemlje međusobno konvergiraju ako je njihov količnik (razlika) stacionarna vremenska serija sa nultom srednjom vrednošću. U suprotnom, prisustvo j. korena sugeriše odsustvo tendencije ka konvergenciji.
- **Monetarna ekonomija**: za zemlje EMU (sa jedinstvenom valutom) konvergencija stopa inflacija značajna je kako bi jedinstvena monetarna politika ECB bila delotvorna na različitim tržištima. Prisustvo jediničnog korena u razlici parova stopa inflacije sugeriše da efikasnost monetarne politike nije obezbeđena.

40

Kako prevazići problem primene regresione analize kod serija sa jediničnim korenom?

- Transformišemo vremenske serije u stacionarne i ocenjujemo zavisnosti prvih diferenci.
- Problem: gde su nam ocene dugoročnih ravnotežnih veza?
- Dugoročne ravnotežne veze odražavaju sistemske odnose u ekonomiji. Njihova analiza je bitna.

Rešenje problema: *kointegracija* (engl. co-integration)

- Rezultat vredan Nobelove nagrade za ekonomiju koja je dodeljena Grejndžeru (engl. Granger) 2003. godine.
- Fundamentalni okvir modeliranja međuzavisnosti ekonomskih veličina