Test jediničnog korena

- Osnovna ideja
- Različite determinističke komponente
- Izračunavanje test-statistike
- Pravilo odlučivanja
- Određivanje broja jediničnih korena
- Prošireni test

1

Stacionarnost

- Stacionarnost vremenske serije: vremenska serija se kreće po prepoznatljivoj putanji tokom vremena
- Podsećanje na definiciju slabe stacionarnosti:

$$1.\ E(X_t) = \mu = const,\ t = 1,2,\dots$$

$$2.\ v(X_t) = E(X_t - \mu)^2 = const,\ t = 1,2,\dots$$

$$3.\ cov(X_t, X_{t-k}) = E(X_t - \mu)(X_{t-k} - \mu) = f(k),\ t = 1,2,\dots,\ k = 1,2,\dots$$

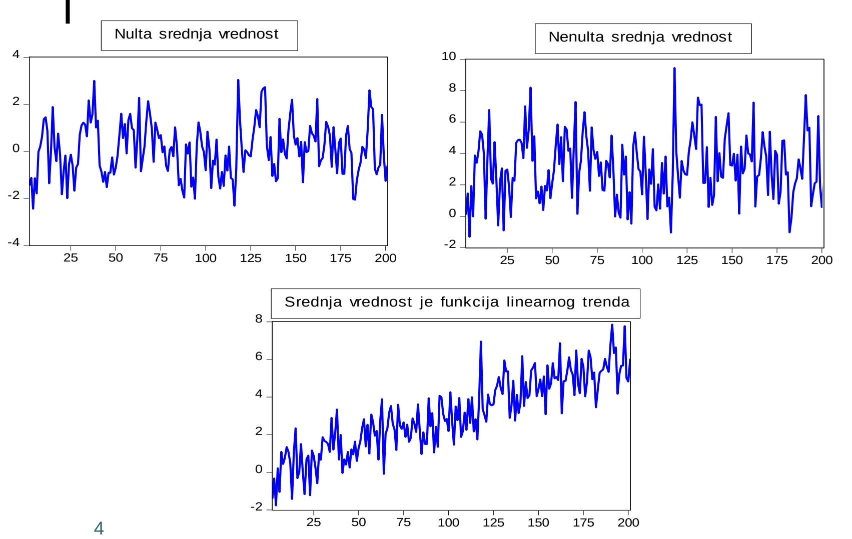
2

Tri tipa stacionarnosti u zavisnosti od srednje vrednosti

- Oko nulte srednje vrednosti
- Oko nenulte srednje vrednosti
- Oko funkcije linearnog trenda (trend-stacionarnost)

3

Tri tipa stacionarnosti u zavisnosti od srednje vrednosti: primer



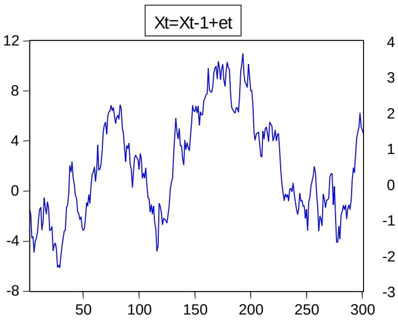
4

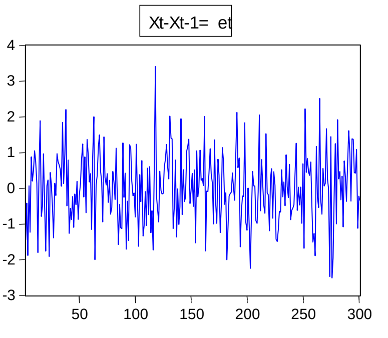
Dva tipa nestacionarnosti - slučajnog hoda

Naziv	Forma	$E(\Delta Xt)$
Slučajan hod *klasični*	$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$	*0*
Slučajan hod *sa konstantnim prirastom*	$X_t = X_{t-1} + \beta + \varepsilon_t$	β

5

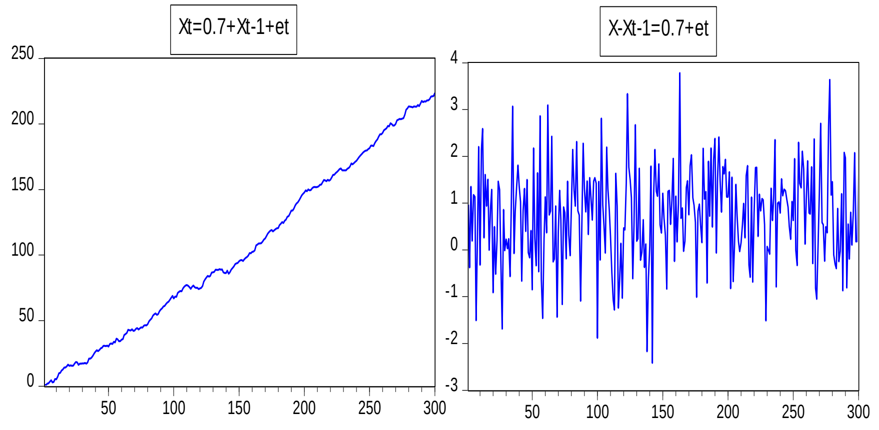
Klasičan slučajan hod: grafički prikaz generisanih podataka





6

Slučajan hod sa konstantnim prirastom: grafički prikaz generisanih podataka



7

Diki-Fulerov - DF (engl. Dickey-Fuller) test jediničnog korena: uvod

- Polazni model:

$$X_t = \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t$$

- Hipoteze:

H_0: Serija poseduje jedinični koren, $\phi_1 = 1, X_t \sim I(1)$

H_1: Serija je stacionarna (oko nenulte vredn.), $\phi_1 < 1, X_t \sim I(0)$

8

DF test za različite determinističke komponente

DF test	τ	τ_t
Determinističke komponente	Konstanta	Konstanta+ Linearni trend

9

Kako se dolazi do vrednosti DF test statistika za različite determinističke komponente?

Varijante DF testa	*Odgovarajući model*
τ	$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_0 + \varepsilon_t$
τ_t	$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_0 + \phi_t t + \varepsilon_t$

10

DF test za različite determinističke komponente II

- Dve varijante DF testa: τ i τ_t
- Nulta (H_0) i alternativna (H_1) hipoteza:

i) τ H_0: $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$, Serija je slučajan hod

H_1: Serija je stacionarna oko nenulte srednje vrednosti

ii) τ_t H_0: $X_t = \beta + X_{t-1} + \varepsilon_t$,
Serija je slučajan hod sa konstantnim prirastom

H_1: Serija je trend-stacionarna

11

Računanje DF statistike

- Primenom metoda ONK ocenjen je model:

$$\hat{X}_t = \hat{\phi}_1 X_{t-1} + \hat{\phi}_0$$

$$s(\hat{\phi}_1)$$

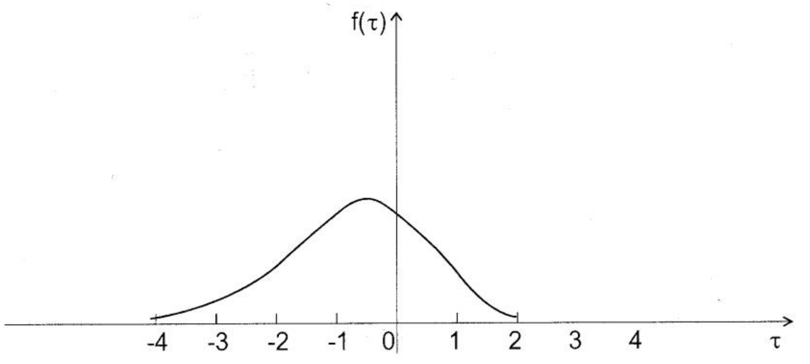
- **DF test-statistika je količnik ocene parametra uz X_{t-1} *umanjene za 1* i odgovarajuće standardne greške te ocene:**

$$DF = \tau = \frac{\hat{\phi}_1 - 1}{s(\hat{\phi}_1)}$$

- DF test statistika ima formu standardne *t*-statistike.
- DF test statistika nema *t*-raspodelu u uslovima istinitosti nulte hipoteze.
- DF test statistika poseduje nestandardnu raspodelu, koju su odredili Dickey i Fuller.
- Kritične vrednosti: Fuller (1976) i MacKinnon (1991).

12

Funkcija gustine DF test-statistike za uzorak velikog obima



13

Pravilo odlučivanja

T *kritične vrednosti za 5%*	τ	τ_t
∞	-2.86	-3.41

- Nulta hipoteza o postojanju jediničnog korena se odbacuje za dovoljno malu vrednost statistike (kada je izračunata vrednost manja od kritične).

- Nulta hipoteza o postojanju jediničnog korena se prihvata za dovoljno veliku vrednost statistike (kada je izračunata vrednost veća od kritične).

14

Određivanje kritičnih vrednosti uz nivo značajnosti 5% za konkretnu dužinu (*T*) vremenske serije

$$\tau^{k} = -2.8621 - \frac{2.738}{T} - \frac{8.36}{T^2}$$

$$\tau_t^{k} = -3.4126 - \frac{4.039}{T} - \frac{17.83}{T^2}$$

15

Određivanje broja jediničnih korena I

- Ako se H_0 ne odbacuje, onda se zaključuje da je serija integrisana prvog reda, X_t~I(1).
- Međutim, potrebno je utvrditi da li je broj jediničnih korena tačno jedan ili eventualno dva.
- Nastavljamo testiranje:

  H_0: $X_t \sim I(2)$ protiv H_1: $X_t \sim I(1)$

  H_0: $\Delta X_t \sim I(1)$ protiv H_1: $\Delta X_t \sim I(0)$.

  Sada je polazna serija u analizi ΔX_t.
- Relevantna specifikacija:

  $$\Delta X_t = \phi_1 \Delta X_{t-1} + \phi_0 + \varepsilon_t$$

  Ocenjujemo ΔX_t u zavisnosti od: ΔX_{t-1} i konstante.
  Proveravamo da li je DF statistika za ocenu uz ΔX_{t-1} veća ili manji od odgovarajuće kritične vrednosti DF testa.

16

Određivanje broja jediničnih korena II

- Ako je H_0 odbačeno u korist H_1, onda se zaključuje da je serija $X_t \sim I(1)$. To znači da je prva diferenca stacionarna, odnosno da serija poseduje tačno jedan jedinični koren.

- Ako je H_0 prihvaćeno kao tačno, onda se zaključuje da je serija integrisana bar drugog reda, $X_t \sim I(2)$.

  - Potrebno je utvrditi da li je broj jediničnih korena tačno dva ili eventualno tri.
  - Nastavljamo testiranje:

    H_0: $X_t \sim I(3)$ protiv H_1: $X_t \sim I(2)$
    H_0: $\Delta^2 X_t \sim I(1)$ protiv H_1: $\Delta^2 X_t \sim I(0)$.

    Itd.

17

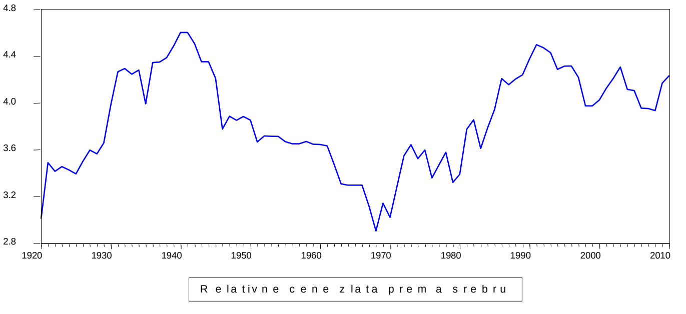
Algoritam testiranja

- I korak: Primenjuje se τ statistika *na polaznu seriju*
  - $\tau > \tau^k \Rightarrow$ Postoji bar jedan jedinični koren
  - $\tau < \tau^k \Rightarrow$ **Serija je stacionarna**. *Kraj testiranja*.
- Ako je $\tau > \tau^k$ prelazimo na II korak
- II korak: Primenjuje se τ statistika *na prvu diferencu polazne serije*
  - $\tau > \tau^k \Rightarrow$ Postoje bar dva jedinična korena
  - $\tau < \tau^k \Rightarrow$ **Serija poseduje tačno jedan jedinični koren.** *Kraj testiranja.*

18

Primer I:
Odnos cena zlata prema ceni srebra

- Period: 1920 – 2010. godina (91 podatak na godišnjem nivou, log vrednosti)



19

Primer I: (nastavak) - primena DF testa

Dati su rezultati:

$$\hat{X}_t = 0.349 + 0.913 X_{t-1}$$
$$(0.038)$$

$$\Delta\hat{X}_t = 0.008 + 0.034 \Delta X_{t-1}$$
$$(0.101)$$

I faza

$$H_0 : X_t \sim I(1)$$
$$H_1 : X_t \sim I(0)$$

$$\left.\begin{array}{l} DF = \dfrac{0.913-1}{0.038} = -2.29 \\ \tau^k = -2.89 \ (\alpha = 0.05) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} -2.29 > -2.89 \\ \text{Hipoteza } H_0 \text{ se ne odbacuje.} \\ \text{Serija poseduje bar jedan jed.koren.} \end{array}\right.$$

II faza

$$H_0 : X_t \sim I(2) \Leftrightarrow \Delta X \sim I(1)$$
$$H_1 : X_t \sim I(1) \Leftrightarrow \Delta X \sim I(0)$$

$$\left.\begin{array}{l} DF = \dfrac{0.034-1}{0.101} = -9.56 \\ \tau^k = -2.89 \ (\alpha = 0.05) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} -9.56 < -2.89 \\ \text{Hipoteza } H_0 \text{ se odbacuje.} \\ \text{Serija poseduje precizno jedan jed.koren.} \end{array}\right.$$

20

Prošireni DF test, PDF(**K**) engl. augmented DF test, ADF(**K**)

- DF test je nepouzdan ukoliko u modelu postoji autokorelacija.
- Modifikuje se polazni model prema:

$$X_t = \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + \delta_1 \Delta X_{t-1} + \delta_2 \Delta X_{t-2} + \ldots + \delta_{\mathbf{K}} \Delta X_{t-\mathbf{K}} + \varepsilon_t$$

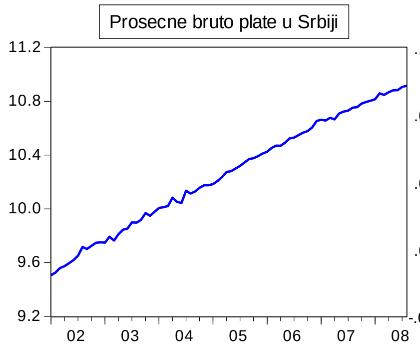
- PDF test je količnik

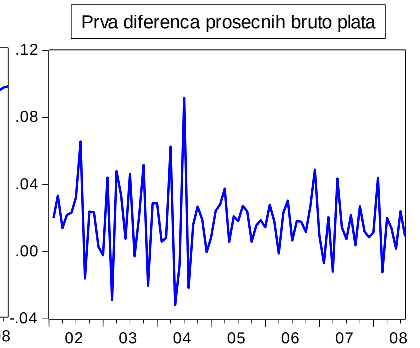
$$PDF(\mathbf{K}) = \tau = \frac{\hat{\phi}_1 - 1}{s(\hat{\phi}_1)}$$

- PDF i DF imaju istu graničnu raspodelu: koristimo iste kritične vrednosti
- ***K*** se određuje u praktičnom radu.

21

Primer II: Prosečne bruto plate u Srbiji, 2002:1-2008:8 (desezonirani podaci, log vrednosti)





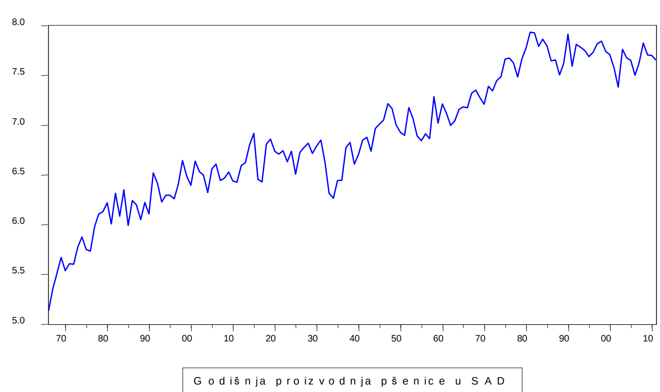
22

Primer II: rezultati PDF testa

I faza: Provera prisustva jednog jediničnog korena	II faza: Provera prisustva drugog jediničnog korena
H_0: X_t~*I(1)* H_1: X_t~*I(0)* *PDF(2)=-1.79,* τ_t^k=-3.47 **-1.79>-3.47** H_0 se ne odbacuje. ***Serija ima bar jedan jedinični koren.***	H_0: ΔX_t~*I(1)* H_1: ΔX_t~*I(0)* *PDF(1)=-12.23* **-12.23<-3.47** H_0 se odbacuje. ***Prva diferenca serije je stacionarna.*** ***Polazna serija ima tačno jedan jedinični koren.***

Primer III:
Godišnja proizvodnja pšenice u SAD-u

- Period: 1866 – 2011. godina (146 godišnjih opservacija, log vrednosti)



24

Primer III:
Primena PDF testa

$$\hat{X}_t = 1.835 + 0.004t + 0.691X_{t-1} - 0.152\Delta X_{t-1},$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad \mathbf{(0.067)} \qquad \mathbf{(0.081)}$$

H_0: $X_t \sim I(1)$

H_1: $X_t \sim I(0)$

$$\left.\begin{array}{l} PDF(1) = \dfrac{0.691-1}{0.067} = -4.61 \\ \tau_t^k = -3.44\,(\alpha = 0.05) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} -4.61 < -3.44 \\ \textbf{Hipoteza } H_0 \textbf{ se odbacuje.} \\ \textbf{Serija je trend-stacionarna.} \end{cases}$$

Korektivni faktor ΔX_{t-1} *je statisticki znacajan* **za 10% znacajnosti.**

$$t = -\frac{0.152}{0.081} = \mathbf{-1.88}$$

25

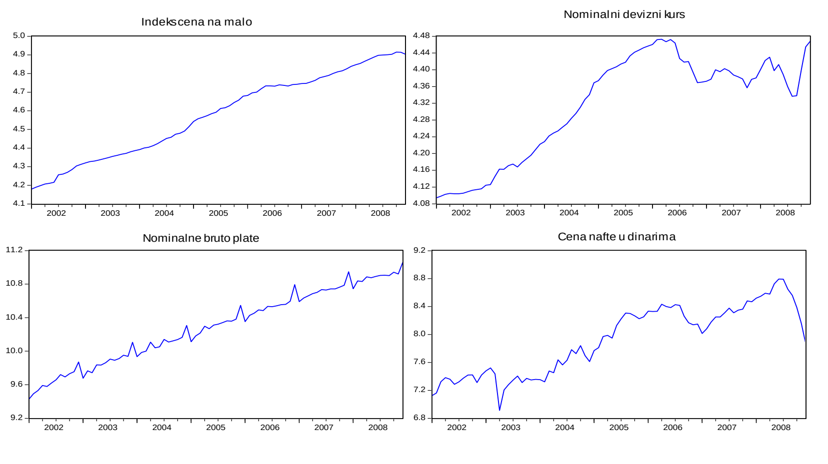
Šta treba znati o kointegraciji?

- Opisna definicija i osnovna svojstva
- Model sa korekcijom ravnotežne greške
- Grejndžer-Johansenova teorema reprezentacije
- Dvostepena procedura Englea i Grejndžera
- Modifikacije polazne ideje
- Ekonomski primer

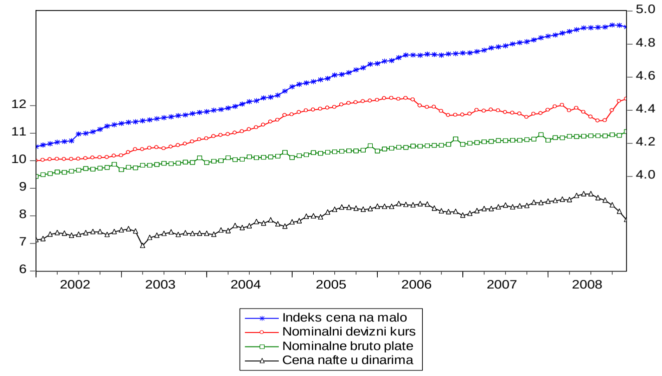
Kointegracija: osnove
Pionirski rad: Engle and Granger (1987)

- Kointegracija podrazumeva stacionarnost linearne kombinacije individualno nestacionarnih vremenskih serija.
- Kointegrisanost proizilazi iz ekonomskih odnosa
  - Dugoročna ravnotežna veza
    - potrošnja i dohodak
    - cene i devizni kurs – teorija o paritetu kupovne snage
    - cene supstitucionih proizvoda sa istog relevantnog tržišta
    - Itd.

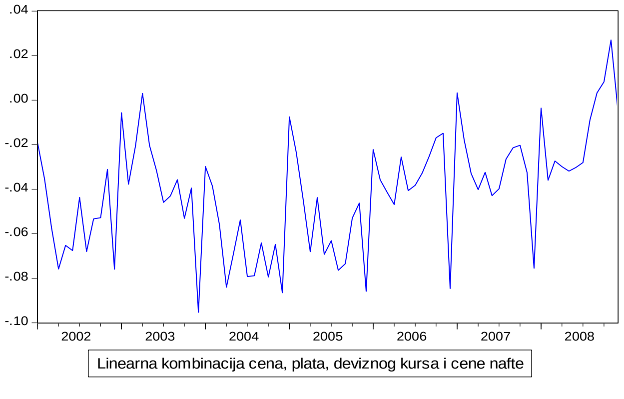
Cene, plate i devizni kurs privrede Srbije i cena nafte na svetskom tržištu – log vrednosti (2002:1 – 2008:12)



Cene, plate i devizni kurs privrede Srbije i cena nafte na svetskom tržištu – log vrednosti (2002:1 – 2008:12)



Cene, plate i devizni kurs privrede Srbije i cena nafte na svetskom tržištu – log vrednosti (2002:1 – 2008:12)



Osnovna svojstva

1. Linearna kombinacija I(1) i I(0) vremenske serije: uvek I(1).
2. Linearna kombinacija I(a) i I(b) vremenske serije, a>b: uvek I(a).
3. Zaključak: da bi **dve** nestacionarne vremenske serije bile kointegrisane, neophodno je da poseduju isti nivo integrisanosti.
4. Dve nestacionarne vremenske serije mogu obrazovati samo jednu stacionarnu linearnu kombinaciju.

Osnovna svojstva II

1. Da bi **više od dve** nestacionarne vremenske serije bile kointegrisane, **nije neophodno** da poseduju isti red integrisanosti.
2. Primer $$\underbrace{X_t \sim I(1), \underbrace{Y_t \sim I(2), Z_t \sim I(2)}_{1.\, I(1)}}_{2.\, I(0)}$$
3. Tri nestacionarne vremenske serije mogu formirati najviše dve nezavisne stacionarne linearne kombinacije.
4. U slučaju kointegrisanosti ***m*** nestacionarnih v. serija, broj nezavisnih kointegracionih relacija može biti ***1,2,...,*** **m-1**.

Model sa korekcijom ravnotežne greške
engl. equilibrium-error-correction model, ECM

Dugoročno Y_t je određeno relacijom

$$Y_t = \beta_0 + \beta X_t$$

Odstupanje od ravnotežnog nivoa u *t:*
(ravnotežna greška)

$$Y_t - \beta_0 - \beta X_t,$$

Odstupanje od ravnotežnog nivoa u *t-1:*

$$Y_{t-1} - \beta_0 - \beta X_{t-1},$$

utiče na dinamiku Y_t

$$\Delta Y_t = f(Y_{t-1} - \beta_0 - \beta X_{t-1})$$

Model sa korekcijom ravnotežne greške II

$$\Delta Y_t = \gamma_0 (Y_{t-1} - \beta_0 - \beta X_{t-1})$$
$$+ \gamma_1 \Delta Y_{t-1} + \gamma_2 \Delta X_{t-1} + sl.greska,\ \gamma_0 < 0.$$

$(Y_{t-1} - \beta_0 - \beta X_{t-1})$ – **mehanizam korekcije ka ravnoteži**

$\Delta Y_{t-1}, \Delta X_{t-1}$ – **varijacije na kratak rok**

Grejndžer-Johansenova teorema reprezentacije – intuitivno objašnjenje

- Ako su vremenske serije kointegrisane, onda je ta informacija relevantna za njihovo kretanje.
- U svakom narednom koraku kretanje se koriguje prema putanji dugoročne ravnoteže veze, tako da vremenske serije ne odstupaju od putanje određene kointegracijom.

Formulacija Grejndžer-Johansenove teoreme reprezentacije

- Postoji ekvivalentnost između kointegrisanih sistema i ECM.
  1. *Ako su vremenske serije kointegrisane, onda se one uvek mogu predstaviti u formi ECM.*
  2. *Ako postoji validna forma ECM bar za jednu promenljivu iz skupa promenljivih koje poseduju j.koren, onda su one kointegrisane*.
- <u>Model sa korekcijom ravnotežne greške sadrži informaciju o nivou vremenskih serija, čak i ako su one nestacionarne</u>.

Relevantna pitanja u empirijskoj analizi

- Kako ispitati da li su date nestacionarne vremenske serije kointegrisane?
- Kako oceniti parametre kointegracione veze?
- Kako oceniti parametre modela sa korekcijom ravnotežne greške?

Dvostepena procedura Englea i Grejndžera

- Prvi korak: testiramo postojanje kointegracije i ocenjujemo kointegracionu vezu između $X_t \sim I(1)$, $Y_t \sim I(1)$.
- Drugi korak: na osnovu ocenjene kointegracije veze ocenjujemo parametre modela sa korekcijom ravnotežne greške.

Prvi korak:
Metodom ONK ocenjujemo model:

$$Y_t = \beta_0 + \beta X_t + \varepsilon_t, \varepsilon_t \text{ } \mathbf{ravnotežna\ greška}$$

i dobijamo ocene parametara: b_0 i b.

$$Y_t = \underbrace{b_0 + bX_t}_{ocenjeno} + \underbrace{e_t}_{neocenjeno}$$

$$e_t = Y_t - b_0 - bX_t$$

Razlika između stvarnih podataka i onih ocenjenim modelom su reziduali. **Reziduali su ocena ravnotežne greške**.

Testiranje kointegracije

- Testiramo da li su reziduali stacionarni ili ne:

$$H_o : e_t \sim I(1), \mathbf{serije\ nisu\ kointegrisane}$$

$$H_1 : e_t \sim I(0), \mathbf{serije\ su\ kointegrisane}$$

- Test kointegracije je tehnički gledano DF test jediničnog korena.
- Test se primenjuje na reziduale: DFR test.
- Asimptotska raspodela DFR testa zavisi od broja promenljivih i od tipa determinističkih komponenti u početnom modelu (samo const. Ili const.+trend).
- <u>Kritične vrednosti DFR testa se razlikuju od kritičnih vrednosti DF testa.</u>

Ocene kointegracionih parametara

- Ukoliko se prihvati hipoteza o kointegrisanosti, onda su ONK ocene kointegracione.
- Svojstva ocena:
  - Nemaju normalnu raspodelu, tako da nije moguća primena standardnih metoda zaključivanja.
  - Superkonzistentne.
  - Pristrasne na malim uzorcima.
- <u>Nikada se ne navode standardne greške ocena parametara kointegracione relacije</u>!!!

Drugi korak: Ocena modela sa korekcijom ravnotežne greške

- Primenom metoda ONK ocenjuje se model oblika:

$$\Delta Y_t = \gamma_0(\underbrace{Y_{t-1} - b_0 - bX_{t-1}}_{\text{ocena iz I koraka}}) + kratkorocna\ dinamika + sl.greška$$

$$\Delta Y_t = \gamma_0 e_{t-1} + kratkorocna\ dinamika + sl.greška$$

- Ocene parametara imaju poželjna statistička svojstva (ukoliko ne postoji greška specifikacije).
- Ocena γ_0 pokazuje stepen korekcije u kretanju zavisne promenljive ka putanji ravnotežne veze.

Primer dvostepene procedure

- <u>Prvi korak</u>: prema mesečnim (log) podacima privrede Srbije o cenama (p), platama (w), dev. kursu (ex) i ceni nafte na svetskom tržištu (poil) u periodu 2002:1-2008:12 ocenjena je linearna kombinacija:

  p=-0.52+0.35w+0.17ex+0.10poil

  za koju je testiranjem utvrđeno da je stacionarna.

- <u>Drugi korak</u>: ocenjen je model mesečne inflacije u formi ECM koji sugeriše da se cene u svom kretanju svakog meseca koriguju za oko 11% prema putanji ravnotežne veze.

Ocenjeni model inflacije u ECM formi

$$\begin{aligned}\Delta\hat{p}_t &= \text{const} - 0.11\underbrace{(p_{t-1} - 0.35w_{t-1} - 0.17ex_{t-1} - 0.10poil_{t-1} + 0.52)}_{\text{odstupanje od putanje ravnoteznerelacije}} \\ &\quad + 0.03\Delta w_t + 0.10\Delta ex_t + 0.207\Delta p_{t-3} \\ &\quad + \text{vestackepromenljive}\end{aligned}$$

Standardne greskeocenasu izostavljene zbog vecepreglednosti

$R^2 = 0.65$**, nema greskespecifikacije**

Napomena: ako se analiza nastavi sa novijim podacima onda kointegracija i dalje važi, ali uz izvesne modifikacije.

Ograničenja procedure

- Da li vremenske serije obrazuju samo jednu stacionarnu relaciju? (U opštem slučaju da, ako ih je dve).
- Koje vremenske serije iz datog skupa se prilagođavaju ravnotežnoj putanji?

Modifikacije polazne ideje kointegracije

- Nelinearna kointegracija
  - Stacionarnost oko nelinearne putanje
  - Nelinearno prilagođavanje stacionarnoj putanji.

Stacionarnost oko nelinearne putanje (primer)

- U periodu 2001:7-2009:7 dobijen je rezultat o kointegraciji:

  $p=-0.15+0.32w+0.24ex+0.11poil+0.01V^*t$

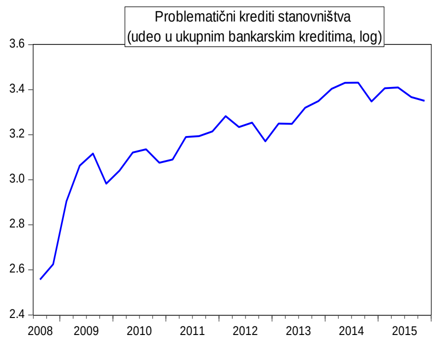
  V=1 za period 2008:7 - 2009:7 i V=0 za ostalo

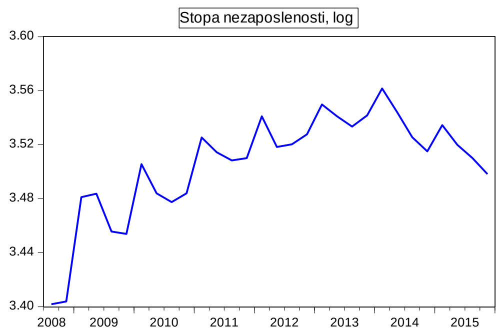
- Cene, plate, kurs i cena nafte su kointegrisane vremenske serije u Srbiji, ali oko dve različite funkcije determinističkog trenda čiji se parametri menjaju u julu 2008.
- Mladenović and Petrović (2014), Currency crash and exchange rate pass-through: A tale of two crises in Serbia, *Eastern European Economics*

Rezime osnovnih koraka u makroekonometrijskom modeliranju

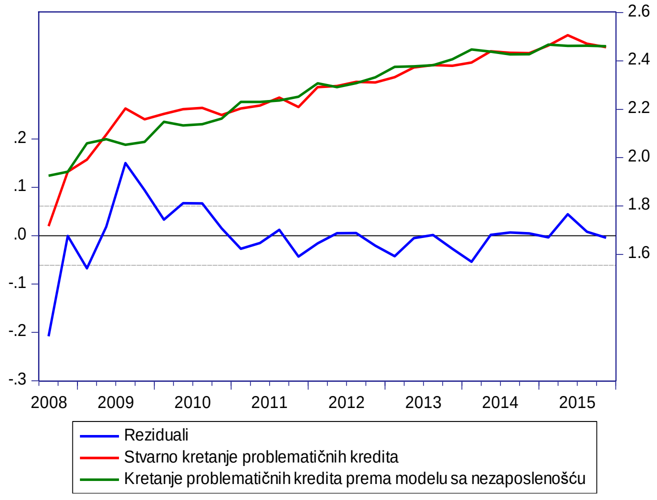
- Test jediničnog korena
  - Ako su serije stacionarne, tada se modeliranje ostvaruje prema principima KLRM.
  - Ako serije poseduju j.koren, tada se proverava postojanje kointegracije.
- Test kointegracije
  - Ako postoji kointegracija, tada se ocenjuje ECM i determiniše endogenost i egzogenost.
  - Ako kointegracija ne postoji, tada se
    - Ocenjuje model prvih diferenci.
    - Redefiniše skup promenljivih.

Primer: Modeliranje problematičnih kredita sektora stanovništva u Srbiji (2008Q3 – 2015Q4)





Modeliranje problematičnih kredita sektora stanovništva u Srbiji (2008Q3 – 2015Q4) II



Modeliranje problematičnih kredita sektora stanovništva u Srbiji (2008Q3 – 2015Q4) III

Dependent Variable: Y
Method: Least Squares

Sample: 2008Q3 2015Q4
Included observations: 30

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-2.624177			
@TREND	0.014039			
X	1.337286			

Root MSE	0.058095	R-squared	
Mean dependent var	2.267568	Adjusted R-squared	
S.D. dependent var	0.174833	S.E. of regression	0.061238
Akaike info criterion	-2.653468	Sum squared resid	0.101252
Schwarz criterion	-2.513348	Log likelihood	42.80202
Hannan-Quinn criter.	-2.608642	F-statistic	104.6895
Durbin-Watson stat	0.998131	Prob(F-statistic)	0.000000

Da li su dve serije kointegrisane?

Da li je serija reziduala
$e_t = Y_t - 1.337X_t + 2.624 - 0.014t$ stacionarna?

$$H_o : e_t \sim I(1), \text{ serije nisu kointegrisane}$$
$$H_1 : e_t \sim I(0), \text{ serije jesu kointegrisane}$$

$$\left.\begin{array}{l} DFR = \text{-}5.39 \\ DFR^k(\alpha = 0.05) = -4.11 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{-}5.39 < -4.11$$
$$H_1 \text{ se prihvata.}$$

- Na dugi rok nivo problematičnih kredita stanovništva određen je promenama na tržištu radne snage.
- Povećanje nezaposlenosti dovodi na dugi rok do porasta učešća ovih kredita u ukupnim kreditima.