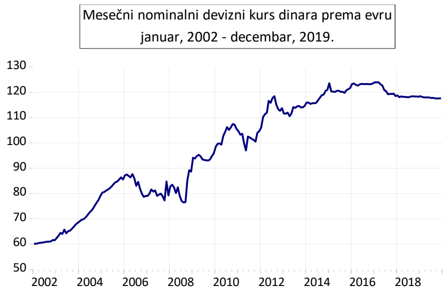
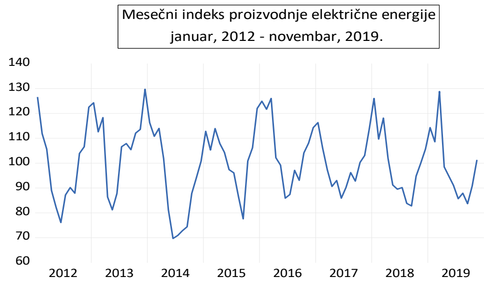
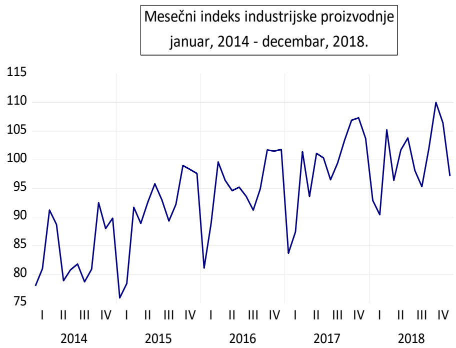
Profesor Zorica Mladenović
Osnovi ekonometrije
24.4.20.

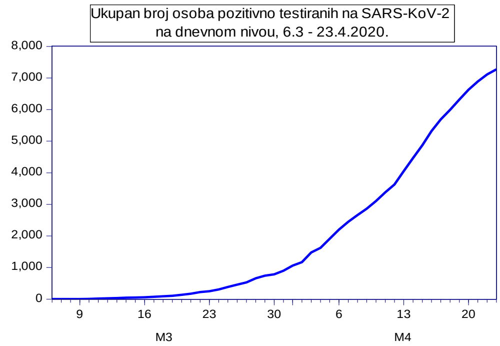
ANALIZA VREMENSKIH SERIJA

1. Dati su grafici četiri vremenske serije koje se odnose na Srbiju. Da li vizuelna analiza podataka sugeriše njihovu stacionarnost? Da li je eventualno potrebno uključiti sezonske veštačke promenljive kod modeliranja? Objasniti.









Rešenje:

Pouzdana provera stacionarnosti zasniva se na primeni testova jediničnog korena. U cilju preliminarne analize korisno je razmotriti grafički prikaz podataka.

Nominalni devizni kurs u datom periodu karakterišu podperiodi rasta (deprecijacija dinara), pada (aprecijacija dinara) i relativno stabilnog kretanja. Nema regularnih fluktuacija. Ova vremenska serija verovatno nije stacionarna, već je njena dinamika opisana postojanjem jediničnih korena (videte zadatke 4. i 5). Sezonske fluktuacije nisu evidentne.

Indeks proizvodnje električne energije u datom periodu ispoljava relativno pravilne oscilacije oko identične srednje vrednosti. Vremenska serija je verovatno stacionarna oko nenulte srednje vrednosti. Primetno je postojanje sezonske komponente (najniže vrednosti su u letnjim mesecima, a najviše u zimskim i jesenjim), koja bi mogla da se modelira na osnovu 11 sezonskih veštačkih promenljivih.

Indeks industrijske proizvodnje u datom periodu relativno pravilno varira oko funkcije linearnog trenda sa pozitivnim nagibom. Vremenska serija je verovatno trend-stacionarna. I kod ove vremenske serije javljaju se značajne sezonske fluktuacije (u toku jedne godine najniži nivoi su u januaru i julu, a najviši u novembru i decembru). Sezonske veštačke promenljive su potrebne u modeliranju, kako je pokazano u zadatku 41. *Zbirke rešenih zadatka iz ekonometrije*.

Ukupan broj osoba pozitivno testiranih na SARS-Kov-2 za period: 6. 3 – 23. 4. 2020. poseduje trend izrazito rastućeg tipa. Teško je uočiti pravilnost u kretanju. Ova vremenska serija je svakako nestacionarna. Dalje ispitivanje prirode nestacionarnosti zahteva detaljnu statističku i ekonometrijsku analizu.

2. Kako izgleda formalni zapis sledećih modela stacionarnih vremenskih serija: AR(2), PS(3) i ARPS(1,2). Da li su modeli ovog tipa adekvatni za opisivanje kretanja cena finansijskih instrumenata?

Rešenje:

$$\text{AR(2) model: } X_t = \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t$$
$$\text{PS(3) model: } X_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \theta_3 \varepsilon_{t-3}$$
$$\text{ARPS(1,2) model: } X_t = \phi_0 + \phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2}.$$

Niti jedan od ponudjenih modela nije pogodan za modeliranje cena finansijskih instrumenata, zato što je njihovo kretanje najčešće nepredvidivo i nestacionarno.

3. AR(1) model često se koristi u analizi inflacije, kao stacionarne vremenske serije, da bi se sagledao stepen njene perzistentnosti. Prethodno se pretpostavlja da je AR(1) model adekvatan za opisivanje inflacije i da je vrednost ϕ_1 pozitivna.

Ukoliko je inflacija perzistentnija, tada je osetljivija na dejstvo neočekivanih slučajnih uticaja, što može ograničiti efekte monetarne politike koja se zasniva na ciljanju inflacije. Objasniti kako se na osnovu vrednosti autoregresionog parametra ϕ_1 može proceniti stepen perzistentnosti.

Rešenje:

Posmatramo AR(1) model: $X_t = \phi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t$ (slobodan član je izostavljen zbog jednostavnosti). Slučajna greška ovog modela jeste proces beli šum. To je niz nekorelisanih slučajnih promenljivih nulte srednje vrednosti i stabilne varijanse, tako da buduće vrednosti ne mogu da se prognoziraju na osnovu sopstvene tekuće i prethodnih vrednosti. Otuda se na osnovu članova belog šuma prati dejstvo neočekivanih slučajnih uticaja. Često se za članove belog šuma kaže da označavaju slučajne šokove. AR(1) model može se transformisati na sledeći način (relacija (10.9) u udžbeniku):

$$
\begin{aligned}
X_t &= \phi_1 X_{t\text{-}1} + \varepsilon_t,\ 0 < \phi_1 < 1 \\
&= \phi_1 \left[\phi_1 X_{t\text{-}2} + \varepsilon_{t-1} \right] + \varepsilon_t \\
&= \phi_1^2 \left[\phi_1 X_{t\text{-}3} + \varepsilon_{t-2} \right] + \varepsilon_t + \phi \varepsilon_{t-1} \\
&= \ldots \\
&= \varepsilon_t + \phi_1 \varepsilon_{t-1} + \phi_1^2 \varepsilon_{t-2} + \phi_1^3 \varepsilon_{t-3} + \ldots + \phi_1^{t-1} \varepsilon_1
\end{aligned}
$$

Pretpostavimo da je $\phi_1 = 0.9$. Tada su parametri uticaja slučajnih članova tokom vremena: $\phi_1 = 0.9$ u trenutku *t-1*, $\phi_1^2 = 0.81$ u trenutku *t-2*, $\phi_1^3 = 0.73$ u trenutku *t-3*, itd. Vremenska serija je pod sporo opadajućim uticajem slučajnih šokova za relativno dug vremenski period.

Pretpostavimo sada da je $\phi_1 = 0.5$. Parametri uticaja slučajnih članova su: 0.5 u trenutku *t-1*, 0.25 u trenutku *t-2*, 0.13 u trenutku *t-3*, itd. Dejstvo neočekivanih slučajnih šokova na vremensku seriju vrlo brzo odumire sa protokom vremena.

Primećujemo da vrednost autoregresionog parametra ϕ_1 determiniše intenzitet rasprostiranja uticaja članova belog šuma. Što je vrednost ovog parametra veća i bliža jedinici, to je dejstvo slučajnih članova na kretanje vremenske serije trajnije. Time je stepen perzistentnosti vremenske serije veći. Obratno, za manje vrednosti parametra ϕ_1 efekti slučajnih šokova brže opadaju, te je stepen perzistentnosti vremenske serije niži.

4. Testira se postojanje jediničnih korena primenom DF testa u vremenskoj seriji nominalni devizni kurs dinara prema evru u Srbiji za period: januar, 2002 – decembar, 2019. Vremenska serija grafički je prikazana u okviru zadatka 1. Ocenjeni su sledeći modeli:

1. $\hat{X}_t = 1.80 + 0.007t + \underset{(0.017)}{0.980} X_{t-1}$

2. $\Delta\hat{X}_t = 0.44 - 0.002t + \underset{(0.118)}{0.230}\Delta X_{t-1} - \underset{(0.099)}{0.303}\Delta^2 X_{t-1} - \underset{(0.068)}{0.196}\Delta^2 X_{t-2}$

Komentarisati specifikacije (1) i (2). Sprovesti postupak testiranja. Kritična vrednost za nivo značajnosti 5% je: τ_t^k =-3.43.

Rešenje:

Model (1) koristi se za proveru postojanja jediničnog korena u nivou serije, X_t. U pitanju je AR(1) model sa konstantom i linearnim trendom, kao determinističkim komponentama. Primenom DF testa ispitujemo da li je vrednost autoregresionog parametra (parametra uz X_{t-1}) jednaka jedan ili je strogo manja od jedan.

Model (2) predstavlja osnovu za testiranje prisustva jediničnog korena u prvoj diferenci vremenske serije. Otuda je zavisna promenljiva ovog modela prva diferenca, ΔX_t. I ovde je reč o AR(1) modelu sa konstantom i linearnim trendom. Proveravamo da li je vrednost autoregresionog parametra (sada parametra uz ΔX_{t-1}) jednaka jedan ili je strogo manja od jedan.

U skupu objašnjavajućih promenljivih modela (2) nalaze se: $\Delta^2 X_{t-1}$ i $\Delta^2 X_{t-2}$. Ove promenljive su uključene u cilju eliminisanja autokorelacije. Otuda se često nazivaju korektivni faktori. Zaključujemo da su promenljive $\Delta^2 X_{t-1}$ i $\Delta^2 X_{t-2}$ opravdano prisutne u modelu (2), imajući u vidu odgovarajuće t-odnose (redom -3.06 i -2.88).

Korektivni faktori uvek se definišu na osnovu prve diference vremenske serije koja je predmet modeliranja u datoj jednačini. Kako se u modelu (2) prva diferenca ΔX_t javlja kao zavisna promenljiva, korektivni faktori su u formi druge diference (prva od prve diference) vremenske serije. Njihovo prisustvo ne utiče na postupak testiranja, ali menja tip testa. Sada je to prošireni DF test reda 2, u oznaci: ADF(2) ili PDF(2).

Postupak testiranja izložen je u nastavku:

I faza

$H_0 : X_t \sim I(1)$

$H_1 : X_t \sim I(0)$

$$\left.\begin{array}{l} DF = \dfrac{0.980-1}{0.017} = -1.18 \\ \tau_t^k = -3.43 \ (\alpha = 0.05) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} -1.18 > -3.43 \\ \text{Hipoteza } H_0 \text{ se ne odbacuje.} \\ \text{Serija poseduje bar jedan jedinični koren.} \end{array}\right.$$

II faza

$H_0 : X_t \sim I(2) \Leftrightarrow \Delta X_t \sim I(1)$

$H_1 : X_t \sim I(1) \Leftrightarrow \Delta X_t \sim I(0)$

$$\left.\begin{array}{l} ADF(2) = \dfrac{0.230-1}{0.118} = -6.53 \\ \tau_t^k = -3.43 \ (\alpha = 0.05) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} -6.53 < -3.43 \\ \text{Hipoteza } H_0 \text{ se odbacuje.} \\ \text{Serija poseduje precizno jedan jedinični koren.} \end{array}\right.$$

5. Pokazati da se identičan rezultat zadatka 4. dobija na osnovu sledećih modela:

1. $\Delta \hat{X}_t = 1.80 + 0.007t - 0.020 X_{t-1}$
   (0.017)

2. $\Delta^2 \hat{X}_t = 0.44 - 0.002t - 0.770 \Delta X_{t-1} - 0.303 \Delta^2 X_{t-1} - 0.196 \Delta^2 X_{t-2}$
   $(0.118) \quad (0.099) \quad (0.068)$

Rešenje:

Kada od obe strane jednakosti modela (1) zadatka 4. oduzmemo X_{t-1}, dobijamo model (1) zadatka 5. U tom modelu ocenjuje se zavisnost prve diference vremenske serije od konstante, linearnog trenda i nivoa vremenske serije iz prethodnog perioda:

$$1.\ \hat{X}_t = 1.80 + 0.007t + \underset{(0.017)}{0.980}X_{t-1} \ / - X_{t-1}$$

$$\Delta\hat{X}_t = 1.80 + 0.007t + \underset{(0.017)}{\overbrace{(0.980-1)}^{-0.020}}X_{t-1}$$

Model (2) zadatka 5. izvodi se iz modela (2) zadatka 4. kada se od obe strane jednakosti oduzme ΔX_{t-1}. Relevantan je model zavisnosti druge diference vremenske serije od konstante, linearnog trenda, prve diference vremenske serije iz prethodnog perioda i druge diference iz perioda *t-1* i *t-2*:

$$2.\ \Delta\hat{X}_t = 0.44 - 0.002t + \underset{(0.118)}{0.230}\Delta X_{t-1} - \underset{(0.099)}{0.303}\Delta^2 X_{t-1} - \underset{(0.068)}{0.196}\Delta^2 X_{t-2} \ / -\Delta X_{t-1}$$

$$\Delta^2\hat{X}_t = 0.44 - 0.002t + \underset{(0.118)}{\overbrace{(0.230-1)}^{-0.770}}\Delta X_{t-1} - \underset{(0.099)}{0.303}\Delta^2 X_{t-1} - \underset{(0.068)}{0.196}\Delta^2 X_{t-2}$$

Ovom transformacijom pojednostavljuje se primena testa jediničnog korena, koji se sada računa kao t-odnos. Naime, u modelu (1) zadatka 5. nova ocena uz X_{t-1} jednaka je staroj oceni umanjenoj za jedan. Takodje, u modelu (2) zadatka 5. nova ocena uz ΔX_{t-1} jednaka je staroj koja je umanjena za jedan. Ocene ostalih parametara se ne menjaju, kao ni postupak statističkog zaključivanja:

I faza

$$H_0 : X_t \sim I(1)$$

$$H_1 : X_t \sim I(0)$$

$$DF = -\frac{0.020}{0.017} = -1.18.$$

II faza

$$H_0 : X_t \sim I(2) \Leftrightarrow \Delta X_t \sim I(1)$$

$$H_1 : X_t \sim I(1) \Leftrightarrow \Delta X_t \sim I(0)$$

$$ADF(2) = -\frac{0.770}{0.118} = -6.53.$$

6. Da li su vremenske serije X_t i Y_t kointegrisane?

$$1.\ X_t = 0.8X_{t-1} + \varepsilon_{1t} \text{ i } Y_t = 0.6Y_{t-1} + \varepsilon_{2t}$$
$$2.\ X_t = X_{t-1} + \varepsilon_{1t} \text{ i } Y_t = \varepsilon_{2t} + 0.5\varepsilon_{2t-1}$$
$$3.\ X_t = X_{t-1} + \varepsilon_{1t} \text{ i } Y_t = Y_{t-1} + \varepsilon_{2t}$$
$$4.\ X_t = X_{t-1} + \varepsilon_{1t} \text{ i } Y_t = X_{t-1} + \varepsilon_{2t}$$

$\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}$ - dva medjusobno nekorelisana bela šuma.

Rešenje:

1. Obe vremenske serije su stacionarne. Koncept kointegracije ne odnosi se na stacionarne vremenske serije.

2. Vremenska serija X_t je slučajan hod (nestacionarna). Vremenska serija Y_t je stacionarna i definisana prema PS(1) modelu. Linearna kombinacija nestacionarne i stacionarne vremenske serije je uvek nestacionarna, tako da date vremenske serije ne mogu biti kointegrisane.

3. Obe vremenske serije su nestacionarne – slučajan hod. Definisane su na osnovu dva medjusobno nekorelisana bela šuma. Vremenske serije X_t i Y_t ne sadrže istovetnu nestacionarnu komponentu koja bi se eventualno neutralisala u njihovom zajedničkom kretanju. Vremenske serije zato nisu kointegrisane.

4. Vremenska serija X_t je slučajan hod. Vremenska serija Y_t definisana je tako da zavisi od X_{t-1} i belog šuma, pa je i sama nestacionarna. Linearna kombinacija, $Y_t - X_t = \varepsilon_{2t} - \varepsilon_{1t}$, je stacionarna, jer zavisi samo od dva stacionarna bela šuma. Prema tome, nestacionarne vremenske serije X_t i Y_t jesu kointegrisane, zato što obrazuju stacionarnu linearnu kombinaciju.

7. Preporuka za samostalno čitanje

Sa linka:

http://www-stat.wharton.upenn.edu/~steele/Courses/434F2005/Context/Co-integration/Murray93DrunkAndDog.pdf

može se preuzeti rad koji na jednostavan način objašnjava koncept kointegracije.