1. Na osnovu uzorka od 10 opservacija za Y_i, X_{1i} i X_{2i} dobijene se sledeće sume:

Σ	Y_i	X_{1i}	X_{2i}
Y_i	88.2	59	88
X_{1i}		92	119
X_{2i}			163

$\sum_{i=1}^{10} Y_i = 20$, $\sum_{i=1}^{10} X_{1i} = 30$, $\sum_{i=1}^{10} X_{2i} = 40$

Oceniti parametre modela metodom ONK.

Rešenje:

$$\boldsymbol{b_1 \Sigma x_{1i}^2 + b_2 \Sigma x_{1i} x_{2i} = \Sigma x_{1i} y_i}$$
$$\boldsymbol{b_1 \Sigma x_{1i} x_{2i} + b_2 \Sigma x_{2i}^2 = \Sigma x_{2i} y_i}$$

$$\boldsymbol{b_0 = \bar{Y} - b_1 \bar{X}_1 - b_2 \bar{X}_2}$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n} = \frac{20}{10} = 2$$

$$\bar{X}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_{1i}}{n} = \frac{30}{10} = 3$$

$$\bar{X}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_{2i}}{n} = \frac{40}{10} = 4$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - 2\bar{Y}\sum_{i=1}^{n} Y_i + n\bar{Y}^2 = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - 2n\bar{Y}^2 + n\bar{Y}^2$$
$$= \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - n\bar{Y}^2 = 88.2 - 10 * 4 = 48.2$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{1i}^2 = \sum_{i=1}^{n} (X_{1i} - \bar{X}_1)^2 = \sum_{i=1}^{n} X_{1i}^2 - n\bar{X}_1^{\ 2} = 92 - 10 * 9 = 2$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{2i}^2 = \sum_{i=1}^{n} (X_{2i} - \bar{X}_2)^2 = \sum_{i=1}^{n} X_{2i}^2 - n\bar{X}_2^{\ 2} = 163 - 10 * 16 = 3$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{1i} x_{2i} = \sum_{i=1}^{n} (X_{1i} - \bar{X}_1) * (X_{2i} - \bar{X}_2) = \sum_{i=1}^{n} X_{1i} X_{2i} - \bar{X}_2 \sum_{i=1}^{n} X_{1i} - \bar{X}_1 \sum_{i=1}^{n} X_{2i} + n\bar{X}_1\bar{X}_2$$
$$= \sum_{i=1}^{n} X_{1i} X_{2i} - n\bar{X}_1\bar{X}_2 - n\bar{X}_1\bar{X}_2 + n\bar{X}_1\bar{X}_2 = \sum_{i=1}^{n} X_{1i} X_{2i} - n\bar{X}_1\bar{X}_2$$
$$= 119 - 10 * 3 * 4 = -1$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{1i}y_i = \sum_{i=1}^{n}(X_{1i} - \bar{X}_1) * (Y_i - \bar{Y}) = \sum_{i=1}^{n} X_{1i}Y_i - n\bar{X}_1\bar{Y} = 59 - 10 * 3 * 2 = -1$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{2i}y_i = \sum_{i=1}^{n}(X_{2i} - \bar{X}_2) * (Y_i - \bar{Y}) = \sum_{i=1}^{n} X_{2i}Y_i - n\bar{X}_2\bar{Y} = 88 - 10 * 4 * 2 = 8$$

Sistem jednačina:

$$2b_1 - b_2 = -1$$
$$-b_1 + 3b_2 = 8$$

Rešenje: $\boldsymbol{b_1 = 1}$
$\boldsymbol{b_2 = 3}$

$$\boldsymbol{b_0} = \bar{Y} - b_1\bar{X}_1 - b_2\bar{X}_2 = 2 - 1 * 3 - 3 * 4 = \boldsymbol{-13}$$

$$\boldsymbol{\hat{Y}_i = -13 + X_{1i} + 3X_{2i}}$$

Kada se X_1 poveća za jednu jedinicu Y će se povećati za jednu jedinicu, pod uslovom da X_2 ostane nepromenjeno.

Kada se X_2 poveća za jednu jedinicu Y će se povećati za tri jedinice, pod uslovom da X_1 ostane nepromenjeno.

2. Na osnovu 20 opservacija ocenjena je zavisnost tražnje za datim proizvodom (Y) od njegove cene (X_1), dohotka potrošača (X_2) i cene supstituta (X_3):

$$\underset{}{\hat{Y}_i = 5.6} - \underset{(0.2)}{1.3X_{1i}} + \underset{(0.05)}{0.6X_{2i}} + \underset{(0.1)}{0.2X_{3i}}, \qquad R^2 = 0.88$$

a) Da li su znaci ocenjenih parametara saglasni sa postavkama ekonomske teorije?
b) Da li su parametri statistički značajni na nivou značajnosti $\alpha = 0.05$?
c) Testirati statističku značajnost istovremenog uticaja objašnjavajućih promenljivih na tražnju za datim proizvodom na nivo značajnosti $\alpha = 0.05$.

Rešenje:

a) Rast cene datog proizvoda od jedne jedinice utiče na pad tražnje za 1.3 jedinice, pod uslovom da su sve ostale objašnjavajuće promenljive nepromenjene.
Rast dohotka za jednu jedinicu utiče na rast tražnje za 0.6 jedinica, pod uslovom da su sve ostale objašnjavajuće promenljive nepromenjene.
Rast cene supstituta od jedne jedinice dovodi do rasta tražnje za datim proizvodom za 0.4 jedinice, pod uslovom da su sve ostale objašnjavajuće promenljive nepromenjene.

Sve ocene parametara su odgovarajućeg znaka.

b)

$H_0: \beta_1 = 0$
$H_1: \beta_1 \neq 0$

$t_{b_1} = \frac{b_1}{s_{b_1}} = \frac{-1.3}{0.2} = -6.5$

$t_{n-k}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = t_{16}(0.025) = 2.12$

$\boldsymbol{|t_{b_1}| > t_{16}(0.025)}$ **-> Na nivou značajnosti od 5% odbacujemo $\boldsymbol{H_0}$ i zaključujemo da je parametar $\boldsymbol{\beta_1}$ statistički značajan.**

$H_0: \beta_2 = 0$
$H_1: \beta_2 \neq 0$

$t_{b_2} = \frac{b_2}{s_{b_2}} = \frac{0.6}{0.05} = 12$

$t_{n-k}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = t_{16}(0.025) = 2.12$

$\boldsymbol{t_{b_2} > t_{16}(0.025)}$ **-> Na nivou značajnosti od 5% odbacujemo $\boldsymbol{H_0}$ i zaključujemo da je parametar $\boldsymbol{\beta_2}$ statistički značajan.**

$H_0: \beta_3 = 0$
$H_1: \beta_3 \neq 0$

$t_{b_3} = \frac{b_3}{s_{b_3}} = \frac{0.2}{0.1} = 2$

$t_{n-k}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = t_{16}(0.025) = 2.12$

$\boldsymbol{t_{b_3} < t_{16}(0.025)}$ **-> Na nivou značajnosti od 5% prihvatamo $\boldsymbol{H_0}$ i zaključujemo da parametar $\boldsymbol{\beta_3}$ nije statistički značajan.**

c)

$H_0: R^2 = 0$
$H_1: R^2 \neq 0$

$$F = \frac{R^2 \,/\, (k-1)}{(1-R^2) \,/\, (n-k)} = \frac{0.88 \,/\, (4-1)}{(1-0.88) \,/\, (20-4)} = 39.11$$

$F_{16}^{3}(0.05) = 3.24$

$\boldsymbol{F}$ > $\boldsymbol{F_{16}^{3}(0.05)}$ -> Na nivou značajnosti od 5% odbacujemo $\boldsymbol{H_0}$ i zaključujemo da je cela regresija statistički značajna.