## Autokorelcija

1. Na osnovu uzorka:

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $Y_t$ | 55 | 70 | 90 | 100 | 90 | 105 | 80 | 110 | 125 | 115 | 130 | 130 |
| $X_t$ | 5.5 | 6.3 | 7.2 | 7 | 6.3 | 7.35 | 5.6 | 7.15 | 7.5 | 6.9 | 7.15 | 6.5 |

Ocenjen je model:

$$\widehat{Y}_t = -72.87 + \underset{(7.95)}{25.79} X_t \ , \quad R^2 = 0.51$$

i date su vrednosti reziduala:

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $e_t$ | -13.95 | -19.58 | -22.79 | -7.63 | 0.42 | -11.65 | 8.47 | -1.50 | 4.48 | 9.95 | 18.50 | 35.26 |

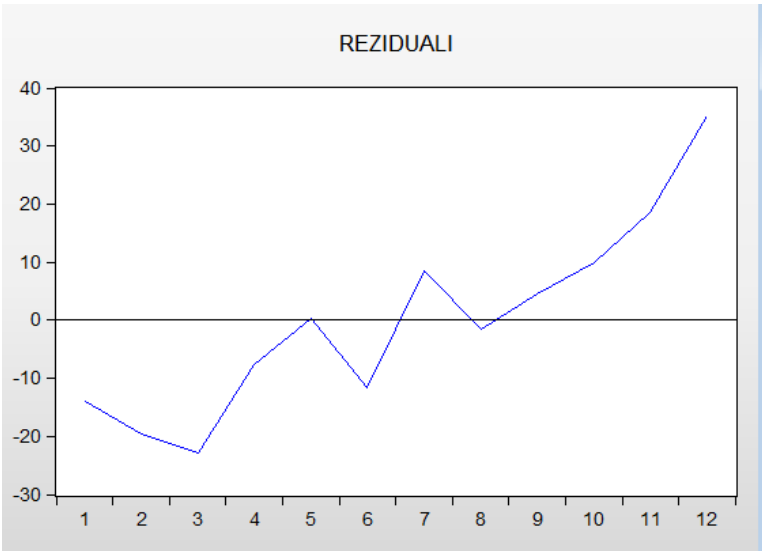
a) Grafički prikazati reziduale prema vremenu na x-osi. Da li se može uočiti neka pravilnost u njihovom kretanju?
b) Testirati postojanje autokorelacije primenom Durbin-Watsonove statistike.
c) Oceniti autokorelacioni koeficijent prvog reda.
d) Transformisati model u cilju eliminisanja autokorelacije prvog reda.
e) Ocenjen je transformisani model:

$$\widehat{Y_t^*} = 4.79 + \underset{(1.98)}{15.4} X_t^* \ , \quad R^2 = 0.87, d = 1.58$$

Postoji li u njemu problem autokorelacije?
f) Pokazati kako sada izgleda polazni model. Šta zaključujete o prirodi autokorelacije?

**Rešenje:**

**a)**



Reziduali pokazuju ciklično kretanje koje podrazumeva zadržavanje istog znak u dužim nizovima. Ciklična promena znaka reziduala može sugerisati postojanje pozitivne autokorelacije.

**b)**

| | $Y_t$ | $X_t$ | $e_t$ | $e_{t-1}$ | $e_t$-$e_{t-1}$ | $(e_t-e_{t-1})^2$ | $e_t^2$ | $e_t$*$e_{t-1}$ | $e_{t-1}^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 55 | 5.5 | -13.95 | - | - | - | 194.59 | - | - |
| | 70 | 6.3 | -19.58 | -13.95 | -5.63 | 31.68 | 383.30 | 273.10 | 194.59 |
| | 90 | 7.2 | -22.79 | -19.58 | -3.21 | 10.29 | 519.18 | 446.10 | 383.30 |
| | 100 | 7 | -7.63 | -22.79 | 15.16 | 229.74 | 58.19 | 173.82 | 519.18 |
| | 90 | 6.3 | 0.42 | -7.63 | 8.05 | 64.81 | 0.18 | -3.22 | 58.19 |
| | 105 | 7.35 | -11.65 | 0.42 | -12.08 | 145.81 | 135.80 | -4.92 | 0.18 |
| | 80 | 5.6 | 8.47 | -11.65 | 20.13 | 405.03 | 71.78 | -98.73 | 135.80 |
| | 110 | 7.15 | -1.50 | 8.47 | -9.97 | 99.37 | 2.24 | -12.68 | 71.78 |
| | 125 | 7.5 | 4.48 | -1.50 | 5.97 | 35.70 | 20.06 | -6.70 | 2.24 |
| | 115 | 6.9 | 9.95 | 4.48 | 5.47 | 29.94 | 99.01 | 44.56 | 20.06 |
| | 130 | 7.15 | 18.50 | 9.95 | 8.55 | 73.16 | 342.39 | 184.12 | 99.01 |
| | 130 | 6.5 | 35.26 | 18.50 | 16.76 | 280.93 | 1243.59 | 652.53 | 342.39 |
| Suma | | | | | | **1406.46** | **3070.31** | **1647.99** | **1826.71** |

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{12}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{12} e_t^2} = \frac{1406.46}{3070.31} = \mathbf{0.46}$$

Izračunata statistika je manja od 2 -> Testiramo postojanje pozitivne autokorelacije u modelu.

$H_0: \rho = 0$

$H_1: \rho > 0$

Za k'=1 i n=12 kritične vrednosti su: $d_d$=0.97 i $d_g$=1.33.

**Pošto je d< $d_d$ zaključujemo da je u modelu prisutna pozitivna autokorelacija.**

**c)**

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^{12} e_t\, e_{t-1}}{\sum_{t=2}^{12} e_{t-1}^2} = \frac{1647.99}{1826.71} = \mathbf{0.90}$$

**d)**

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \varepsilon_t$$

$$\hat{\rho} Y_{t-1} = \hat{\rho}\beta_0 + \hat{\rho}\beta_1 X_{t-1} + \hat{\rho}\varepsilon_{t-1}$$

$$Y_t - \hat{\rho} Y_{t-1} = \beta_0(1-\hat{\rho}) + \beta_1(X_t - \hat{\rho} X_{t-1}) + v_t$$

$$\boldsymbol{Y_t^* = \beta_0^* + \beta_1 X_t^* + v_t}$$

Gde je:

$$Y_t^* = Y_t - \hat{\rho}Y_{t-1} = Y_t - 0.9Y_{t-1} \ , \ X_t^* = X_t - \hat{\rho}X_{t-1} = X_t - 0.9X_{t-1}, \ \beta_0^* = \beta_0(1-\hat{\rho}) = 0.1\beta_0$$

**e)**

$$\widehat{Y_t^*} = \underset{}{4.79} + \underset{(1.98)}{15.4}X_t^* \ , \quad R^2 = 0.87, d = 1.58$$

d je manja od 2 -> Testiramo postojanje pozitivne autokorelacije.

$H_0: \rho = 0$

$H_1: \rho > 0$

Za k'=1 i **n=11** kritične vrednosti su: $d_d$=0.93 i $d_g$=1.32.

**Pošto je d > $d_g$ -> Na nivou značajnosti od 5% odbacujemo $\boldsymbol{H_1}$ i zaključujemo da u modelu nije prisutna autokorelacija prvog reda.**

**f)**

$$b_0 = \frac{b_0^*}{1-\hat{\rho}} = \frac{4.79}{1-0.9} = 47.9$$

$$\widehat{Y}_t = 47.9 + \underset{(1.98)}{15.4}X_t$$

Autokorelacija je **prava** po prirodi (nastala kao posledica prirode podataka i uspešno se otklanja postupkom transformacije).

2. Na osnovu 12 kvartalnih podataka ocenjen je sledeći model:

$$\widehat{Y}_t = 210.44 - \underset{(0.17)}{1.58}X_t \ , \quad R^2 = 0.89$$

Ocenjena je i pomoćna regresija:

$$\hat{e}_t = 0.6 - 0.007X_t - 0.26e_{t-1} + 0.02e_{t-2} + 0.1e_{t-3} \ , \quad R^2 = 0.08$$

Testirati postojanje autokorelacije trećeg reda primenom Godfrey-Breuschovog testa.

**Rešenje:**

$H_0: \ \rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = 0$

$H_1: \ H_0 \text{ nije tačno} - \text{bar jedan od parametara je različit od } 0$

$GB = T * R^2 = 12 * 0.08 = 0.96$

$\chi_3^2(\alpha = 0.05) = 7.815$

**$\boldsymbol{GB} < \boldsymbol{\chi_3^2(\alpha = 0.05)}$ -> Na nivou značajnosti od 5% odbacujemo $\boldsymbol{H_1}$ i zaključujemo da u modelu ne postoji autokorelacija do trećeg reda.**

## Greške specifikacije modela

1. Na osnovu uzorka od 10 opservacija izračunate su sledeće vrednosti i ocenjen je model:

| $\Sigma$ | $y_i$ | $x_{1i}$ | $x_{2i}$ |
|---|---|---|---|
| $y_i$ | 140 | 199.8 | -34.4 |
| $x_{1i}$ | | 328 | -42.3 |
| $x_{2i}$ | | | 11.8 |

$$\hat{Y}_i = 0.102 + \underset{(0.07)}{0.434X_{1i}} - \underset{(0.38)}{1.361X_{2i}} \quad , \quad R^2 = 0.9$$

a) Odrediti pristrasnost ocene uz $X_2$ koja se javlja izostavljanjem statistički značajne promenljive $X_1$ iz modela.
b) Kolika bi bila ocena parametra uz $X_2$ u pogrešno specifikovanom modelu?
c) Odrediti pristrasnost ocene uz $X_1$ koja se javlja izostavljanjem statistički značajne promenljive $X_2$ iz modela.

**Rešenje:**

**a)**

T: $\hat{Y}_i = 0.102 + 0.434X_{1i} - 1.361X_{2i}$

⊥: $\hat{Y}_i = b_0 + b_2X_{2i}$

$\Pr(b_2) = b_1 * p^*$

$\hat{X}_{1i} = p_0 + p^* * X_{2i}$

$\Pr(b_2) = b_1 * p^* = b_1 * \frac{\sum x_{1i}x_{2i}}{\sum x_{2i}^2} = 0.434 * \frac{-42.3}{11.8} = \mathbf{-1.56}$ (Ocena je pristrasna naniže)

**b)**

$b_{2(\perp)} = b_{2(T)} + Pr(b_2) = -1.361 - 1.56 = \mathbf{-2.92}$

ili

$$b_{2\perp} = \frac{\sum x_{2i}y_i}{\sum x_{2i}^2} = \frac{-34.4}{11.8} = \mathbf{-2.92}$$

**c)** T: $\hat{Y}_i = 0.102 + 0.434X_{1i} - 1.361X_{2i}$

⊥: $\hat{Y}_i = b_0 + b_1X_{1i}$

$\Pr(b_1) = b_2 * p^*$

$\hat{X}_{2i} = p_0 + p^* * X_{1i}$

$\Pr(b_1) = b_2 * p^* = b_2 * \frac{\sum x_{1i}x_{2i}}{\sum x_{1i}^2} = -1.361 * \frac{-42.3}{328} = \mathbf{0.18}$ (Ocena je pristrasna naviše)