

1. Posmatramo jednostavni agregatni model:

$$C_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_t + \epsilon_{1t}$$

$$I_t = \beta_0 + \beta_1 Y_{t-1} + \beta_2 Y_t + \epsilon_{2t}$$

$$Y_t = C_t + I_t$$

( $C_t$ - potrošnja,  $Y_t$ - dohodak i  $I_t$ - investicije)

- a) Ispitati identifikovanost sistema.  
 b) Oceniti jednačinu potrošnje primenom metoda dvostepenih najmanjih kvadrata (2SNK) ako su dati podaci iz uzorka veličine 30:

$$\sum c_t y_{t-1} = 12, \sum y_{t-1}^2 = 30.69, \sum y_t y_{t-1} = 18.7,$$

$$\bar{c}_t = 23.7, \bar{Y}_t = 51.4, \bar{Y}_{t-1} = 47.8.$$

- c) Oceniti parametre strukturne forme za jednačinu potrošnje metodom instrumentalnih promenljivih.

**Rešenje:**

- a) Endogene promenljive su:  $C_t$ ,  $I_t$  i  $Y_t$ .  
 Predeterminisane promenljive su: 1 i  $Y_{t-1}$ .

Identifikovanost sistema se ispituje u sledećoj tabeli:

Jednačina	Br. paramet. u jednačini	Br. predetermin. prom. u sistemu	Identifikacija
$C_t$	2	2	$2 = 2$
$I_t$	3	2	$3 > 2$

Prva jednačina je tačno identifikovana, dok je druga jednačina nedovoljno identifikovana.

- b) Primena metoda 2SNK sastoji se iz dva koraka.  
 U prvom koraku, primenom metoda ONK, ocenjujemo redukovanu formu za endogeno promenljivu koja se javlja kao objašnjavajuća u strukturnoj jednačini koju ocenjujemo.  
 U primeru, za jednačinu potrošnje ocenjujemo redukovanu formu za  $Y_t$ .

Redukovana forma:

$$Y_t = c_0 + c_1 Y_{t-1} + v_{1t}$$

$$\hat{c}_1 = \frac{\sum y_t y_{t-1}}{\sum y_{t-1}^2} = \frac{18.7}{30.69} = 0.61$$

$$\hat{c}_0 = \bar{Y}_t - \hat{c}_1 * \bar{Y}_{t-1} = 51.4 - 0.61 * 47.8 = 22.24$$

Ocenjena redukovana forma:

$$\widehat{Y}_t = 22.24 + 0.61Y_{t-1}$$

Izražena u centriranim vrednostima:

$$\widehat{y}_t = 0.61y_{t-1}$$

U drugom koraku, primenom metoda ONK, ocenjujemo jednačinu potrošnje u kojoj se umesto objašnjavajuće promenljive  $Y_t$  nalazi ocena dobijena u prvom koraku:

$$C_t = \alpha_0 + \alpha_1 \widehat{Y}_t + \epsilon_{1t}$$

$$\widehat{\alpha}_1 = \frac{\sum c_t \widehat{y}_t}{\sum \widehat{y}_t^2} = \frac{\sum c_t (0.61y_{t-1})}{\sum (0.61y_{t-1})^2} = \frac{0.61 * \sum c_t y_{t-1}}{0.61^2 \sum y_{t-1}^2} = 0.64$$

$$\widehat{\alpha}_0 = \bar{C}_t - \widehat{\alpha}_1 * \bar{Y}_t = 23.7 - 0.64 * 51.4 = -9.2$$

Primenom metoda 2SNK ocenjena je jednačina potrošnje:

$$\widehat{C}_t = -9.2 + 0.64Y_t$$

c) Datu jednačinu množimo pojedinačno sa svakom predeterminisanom promenljivom:

- I  $C_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_t + \epsilon_{1t} \quad /* 1$
- II  $C_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_t + \epsilon_{1t} \quad /* Y_{t-1}$

Dobija se:

- I  $C_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_t + \epsilon_{1t}$
- II  $C_t Y_{t-1} = \alpha_0 Y_{t-1} + \alpha_1 Y_t Y_{t-1} + \epsilon_{1t} Y_{t-1}$

Nakon sumiranja, izjednačavanja suma:  $\sum \epsilon_{1t}$  i  $\sum \epsilon_{1t} Y_{t-1}$  sa nulom, kao i zamene nepoznatih parametara odgovarajućim ocenama, dobijamo sledeći sistem jednačina:

- I  $\sum C_t = n\widehat{\alpha}_0 + \widehat{\alpha}_1 \sum Y_t$
- II  $\sum C_t Y_{t-1} = \widehat{\alpha}_0 \sum Y_{t-1} + \widehat{\alpha}_1 \sum Y_t Y_{t-1}$

$$\sum C_t = n * \bar{C}_t = 30 * 23.7 = 711$$

$$\sum Y_t = n * \bar{Y}_t = 30 * 51.4 = 1542$$

$$\sum C_t Y_{t-1} = \sum c_t y_{t-1} + n * \bar{C}_t * \bar{Y}_{t-1} = 12 + 30 * 23.7 * 47.8 = 33997.8$$

$$\sum Y_{t-1} = n * \bar{Y}_{t-1} = 30 * 47.8 = 1434$$

$$\sum Y_t Y_{t-1} = \sum y_t y_{t-1} + n * \bar{Y}_t * \bar{Y}_{t-1} = 18.7 + 30 * 51.4 * 47.8 = 73726.3$$

$$30 * \widehat{\alpha}_0 + 1542 * \widehat{\alpha}_1 = 711$$

$$1434 * \widehat{\alpha}_0 + 73726.3 * \widehat{\alpha}_1 = 33997.8$$

**Rešenje:**  $\widehat{\alpha}_1 = 0.64$ ,  $\widehat{\alpha}_0 = -9.2$ .

Ocenjena je jednačina potrošnje metodom instrumentalnih promenljivih:

$$\widehat{C}_t = -9.2 + 0.64Y_t$$

Pošto je jednačina tačno identifikovana, primena metoda 2SNK i metoda instrumentalnih promenljivih dala je isti rezultat.

2. Dat je ravnotežni sistem ponude i tražnje jednog proizvoda:

$$Q_t = \alpha_0 + \alpha_1 P_t + \epsilon_{1t} \quad \text{- ponuda}$$

$$Q_t = \beta_0 + \beta_1 P_t + \beta_2 Y_t + \beta_3 W_t + \epsilon_{2t} \quad \text{- tražnja}$$

( $Q_t$ - ravnotežni nivo ponude i tražnje,  $P_t$ - cena datog proizvoda,  $Y_t$ - raspoloživ dohodak i  $W_t$ - bogatstvo)

- Ispitati identifikovanost sistema.
- Oceniti jednačinu ponude primenom metoda dvostepenih najmanjih kvadrata (2SNK) ako su dati podaci iz uzorka:

$Q_t$	4	7	14	17	20
$P_t$	3	2	3	6	7
$Y_t$	13	11	13	16	15
$W_t$	5	3	3	2	2

**Rešenje:**

- Endogene promenljive su:  $Q_t$  i  $P_t$ .  
Egzogene promenljive su: 1,  $Y_t$  i  $W_t$ .

Identifikovanost sistema se ispituje u sledećoj tabeli:

Jednačina	Br. paramet. u jednačini	Br. egzogenih prom. u sistemu	Identifikacija
Ponuda	2	3	$2 < 3$
Tražnja	4	3	$4 > 3$

Prva jednačina je prekomerno identifikovana, dok je druga jednačina nedovoljno identifikovana.

**b) Prvi korak:**

Redukovana forma za  $P_t$ :

$$P_t = c_0 + c_1 Y_t + c_2 W_t + v_{1t}$$

$$\hat{c}_1 \sum y_t^2 + \hat{c}_2 \sum y_t w_t = \sum y_t p_t$$

$$\hat{c}_1 \sum y_t w_t + \hat{c}_2 \sum w_t^2 = \sum w_t p_t$$

$$\hat{c}_0 = \bar{P}_t - \hat{c}_1 * \bar{Y}_t - \hat{c}_2 * \bar{W}_t$$

	$P_t$	$Y_t$	$W_t$	$p_t$	$y_t$	$w_t$	$y_t * w_t$	$y_t^2$	$w_t^2$	$y_t * p_t$	$w_t * p_t$
	3.00	13.00	5.00	-1.20	-0.60	2.00	-1.20	0.36	4.00	0.72	-2.40
	2.00	11.00	3.00	-2.20	-2.60	0.00	0.00	6.76	0.00	5.72	0.00
	3.00	13.00	3.00	-1.20	-0.60	0.00	0.00	0.36	0.00	0.72	0.00
	6.00	16.00	2.00	1.80	2.40	-1.00	-2.40	5.76	1.00	4.32	-1.80
	7.00	15.00	2.00	2.80	1.40	-1.00	-1.40	1.96	1.00	3.92	-2.80
Suma	21.00	68.00	15.00	0.00	0.00	0.00	<b>-5.00</b>	<b>15.20</b>	<b>6.00</b>	<b>15.40</b>	<b>-7.00</b>
Prosek	4.20	13.60	3.00								

Sistem jednačina:

$$15.2\hat{c}_1 - 5\hat{c}_2 = 15.4$$

$$-5\hat{c}_1 + 6\hat{c}_2 = -7$$

**Rešenje:  $\hat{c}_1 = 0.87$ ,  $\hat{c}_2 = -0.44$ .**

$$\hat{c}_0 = 4.2 - 0.87 * 13.6 + 0.44 * 3 = -6.3$$

Ocenjena redukovana forma:

$$\hat{P}_t = -6.3 + 0.87Y_t - 0.44W_t$$

Izražena u centriranim vrednostima:

$$\hat{p}_t = 0.87y_t - 0.44w_t$$

**Drugi korak:**

$$Q_t = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{P}_t + \epsilon_{1t}$$

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{\sum q_t \hat{p}_t}{\sum \hat{p}_t^2} = \frac{\sum q_t (0.87y_t - 0.44w_t)}{\sum (0.87y_t - 0.44w_t)^2}$$

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{0.87 \sum q_t y_t - 0.44 \sum q_t w_t}{0.87^2 \sum y_t^2 - 2 * 0.87 * 0.44 \sum y_t w_t + (-0.44)^2 \sum w_t^2}$$

	P <sub>t</sub>	Y <sub>t</sub>	W <sub>t</sub>	Q <sub>t</sub>	p <sub>t</sub>	y <sub>t</sub>	w <sub>t</sub>	q <sub>t</sub>	y <sub>t</sub> *w <sub>t</sub>	y <sub>t</sub> <sup>2</sup>	w <sub>t</sub> <sup>2</sup>	y <sub>t</sub> *p <sub>t</sub>	w <sub>t</sub> *p <sub>t</sub>	q <sub>t</sub> *y <sub>t</sub>	q <sub>t</sub> *w <sub>t</sub>
	3.00	13.00	5.00	4.00	-1.20	-0.60	2.00	-8.40	-1.20	0.36	4.00	0.72	-2.40	5.04	-16.80
	2.00	11.00	3.00	7.00	-2.20	-2.60	0.00	-5.40	0.00	6.76	0.00	5.72	0.00	14.04	0.00
	3.00	13.00	3.00	14.00	-1.20	-0.60	0.00	1.60	0.00	0.36	0.00	0.72	0.00	-0.96	0.00
	6.00	16.00	2.00	17.00	1.80	2.40	-1.00	4.60	-2.40	5.76	1.00	4.32	-1.80	11.04	-4.60
	7.00	15.00	2.00	20.00	2.80	1.40	-1.00	7.60	-1.40	1.96	1.00	3.92	-2.80	10.64	-7.60
Suma	21.00	68.00	15.00	62.00	0.00	0.00	0.00	0.00	<b>-5.00</b>	<b>15.20</b>	<b>6.00</b>	<b>15.40</b>	<b>-7.00</b>	<b>39.80</b>	<b>-29.00</b>
Prosek	4.20	13.60	3.00	12.40											

Rešenje:  $\hat{\alpha}_1 = \frac{47.39}{16.49} = 2.87$

$$\hat{\alpha}_0 = 12.4 - 2.87 * 4.2 = 0.35$$

III

$$Q_t = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{P}_t + \epsilon_{1t}$$

	Q <sub>t</sub>	$\hat{P}_t$	q <sub>t</sub>	$\hat{p}_t$	q <sub>t</sub> * $\hat{p}_t$	$\hat{p}_t^2$
	4.00	2.81	-8.40	-1.40	11.78	1.97
	7.00	1.95	-5.40	-2.26	12.21	5.12
	14.00	3.69	1.60	-0.52	-0.84	0.27
	17.00	6.74	4.60	2.53	11.63	6.39
	20.00	5.87	7.60	1.66	12.60	2.75
Suma	<b>62.00</b>	<b>21.06</b>	<b>0.00</b>	<b>0.00</b>	<b>47.39</b>	<b>16.49</b>
Prosek	12.4	4.2				

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{\sum q_t \hat{p}_t}{\sum \hat{p}_t^2} = \frac{47.39}{16.49} = 2.87$$

$$\hat{\alpha}_0 = 12.4 - 2.87 * 4.2 = 0.35$$

Primenom metoda 2SNK ocenjena je jednačina ponude:

$$\hat{Q}_t = 0.35 + 2.87 P_t$$