


- **Autokorelacija**
- **Zorica Mladenović**

1

1



**Pretpostavke KLRM**

1.  $E(\varepsilon_i) = 0$
2.  $v(\varepsilon_i) = \sigma^2 = \text{const.}$
3.  $\text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$  za  $i$  različito od  $j$
4. Objašnjavajuće promenljive nisu određene stohastičkim članom
5.  $\varepsilon_i : N(0, \sigma^2)$
6. Ne postoji tačna linearna zavisnost između objašnjavajućih promenljivih.

2



## Šta ako su pretpostavke KLRM narušene?

- Kada dolazi do narušavanja pretpostavki?
- Kako se to odražava na ocene parametara i na standardne greške ocena?
- Kako se ispituje da li su pretpostavke narušene ili ne?
- Šta raditi u slučaju kada su pretpostavke narušene?


3



## Pretpostavka KLRM vezana za autokorelaciju

1.  $E(\varepsilon_i) = 0$
2.  $v(\varepsilon_i) = \sigma^2 = \text{const.}$
- 3.  $\text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$  za  $i$  različito od  $j$**
4. Objašnjavajuće promenljive nisu određene stohastičkim članom
5.  $\varepsilon_i : N(0, \sigma^2)$
6. Ne postoji tačna linearna zavisnost između objašnjavajućih promenljivih.


4



### Pretpostavka 3: $\text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ za $i \neq j$ Odsustvo autokorelacije

- Odsustvo autokorelacije: slučajne greške su nekorelisane
  - $\text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$  za  $i \neq j$Nema pravilnosti u korelacionoj strukturi slučajnih greški.
- Postoji autokorelacija: slučajne greške koje su uređene tokom vremena su korelisane
  - $\text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \neq 0$  za  $i \neq j$Slučajne greške slede prepoznatljiv obrazac u kretanju.
- Najčešća se javlja u analizi vremenskih serija:
  - $\text{Cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-s}) \neq 0$  za  $s=1,2,\dots$


5



### Zašto se javlja autokorelacija?

1. Trajni efekat egzogenih šokova na kretanje ekonomskih vremenskih serija
  - Primer: obustava rada i ocenjivanje zavisnosti ostvarene proizvodnje od količine uloženog rada
2. Inercija u kretanju ekonomskih veličina
3. Modifikacija polaznih podataka
  - Neki kvartalni podaci se dobijaju kao prosek tromesečnih vrednosti


6



## Priroda autokorelacije

- Autokorelacija može biti “prava” i “lažna”
  - “Prava”: posledica prirode podataka
  - “Lažna”: model je pogrešno postavljen
  
- Autokorelacija može biti
  - Pozitivna ( $\text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-s}) > 0, s = 1, 2, \dots$ )
  - Negativna ( $\text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-s}) < 0, s = 1, 2, \dots$ )

7



## Priroda autokorelacije II

- Autokorelacija može biti
  - Prvog reda:
 
$$\varepsilon_t = \rho \varepsilon_{t-1} + v_t$$
  - Drugog reda (reda 2)
 
$$\varepsilon_t = \rho_1 \varepsilon_{t-1} + \rho_2 \varepsilon_{t-2} + v_t$$
  - ...
  - Reda  $k$ 

$$\varepsilon_t = \rho_1 \varepsilon_{t-1} + \rho_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \rho_k \varepsilon_{t-k} + v_t.$$

8

● ● ●

**Svojstva slučajne greške koja je autokorelisana prvog reda:**

$$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + v_t, \quad v_t : N(0, \sigma_v^2)$$

$\rho \in [-1, 1] \rightarrow$  autokorelacioni koeficijent prvog reda

Može se pokazati da je:

$$E(\varepsilon_t) = 0, \quad t = 1, 2, \dots$$

$$v(\varepsilon_t) = E(\varepsilon_t^2) = \frac{\sigma_v^2}{1 - \rho^2} = \sigma^2 = \text{const}, \quad t = 1, 2, \dots$$

$$\text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-s}) = E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-s}) = \rho^s \sigma^2, \quad s = 1, 2, \dots$$

$s = 1 : \text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}) = \rho \sigma^2 \Rightarrow$

$$\rho = \frac{\text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1})}{\sqrt{v(\varepsilon_t)v(\varepsilon_{t-1})}} = \frac{\rho \sigma^2}{\sqrt{\sigma^2 \sigma^2}}$$


9

● ● ●

**Posledice primene metoda ONK u prisustvu autokorelacije**

- Primenom metoda ONK na model sa autokorelisanim greškama dobijaju se ocene koje nisu najbolje linearne nepristrasne ocene.
  - Ocene su i dalje nepristrasne
  - Ocene medjutim nisu efikasne – njihova varijansa nije najmanja moguća (biće pokazano).


10



### Posledice primene metoda ONK u prisustvu autokorelacije II

- Standardne greške ocena nisu precizna mera varijabiliteta ocena.
- Standardne greške ocena najčešće potcenjuju stvarnu varijansu ocena parametara modela.
- Koeficijent determinacije nije valjan pokazatelj kvaliteta modela.
- t-odnosi i F – statistika su nepouzdana.
- Intervalne ocene parametara su nedovoljno široke.

11



### Kako se proverava postojanje autokorelacije?

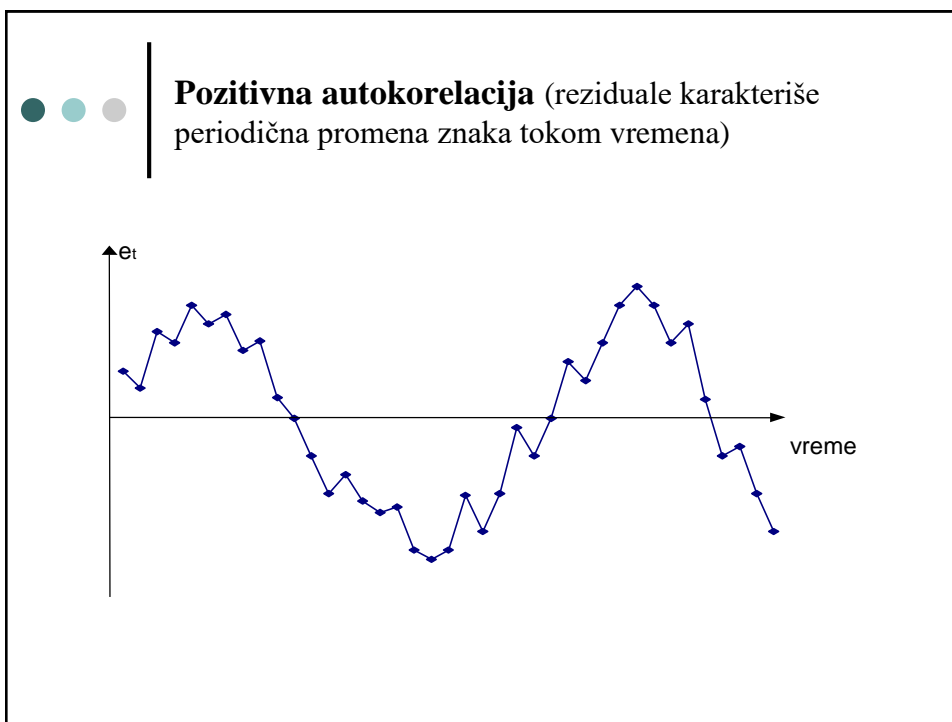
1. Neformalni (grafički) metodi
2. Formalni metodi (testiranje)

12

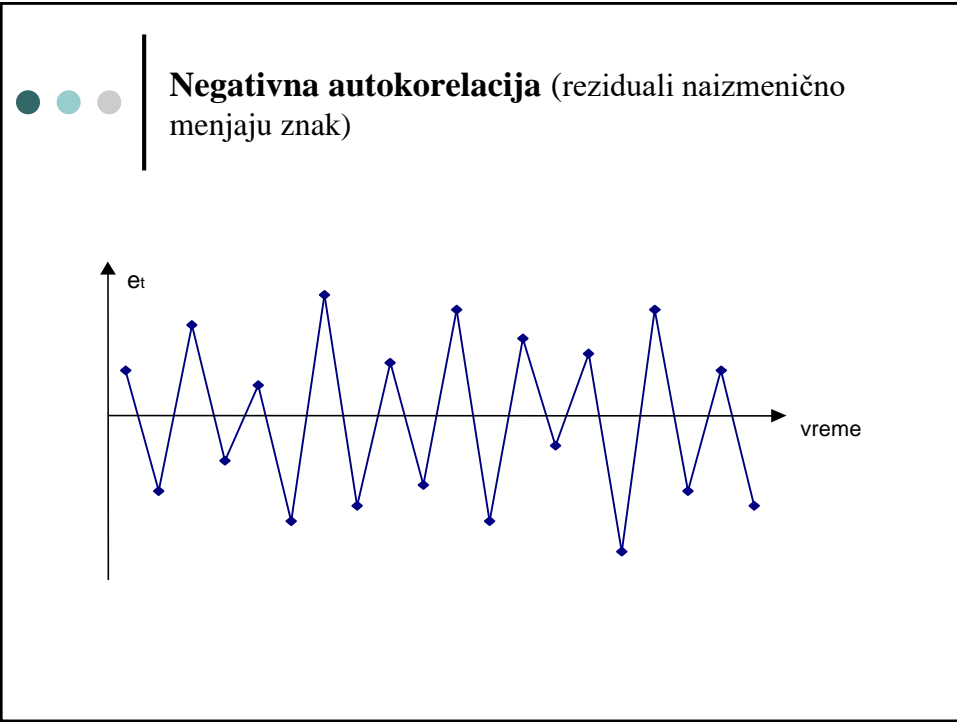
● ● ● | Grafički metodi

1. Grafički prikaz reziduala u odnosu na vreme
2. Dijagram rasturanja tačaka reziduala u trenutku  $t$  i nekom od prethodnih trenutaka (recimo  $t-1$ )

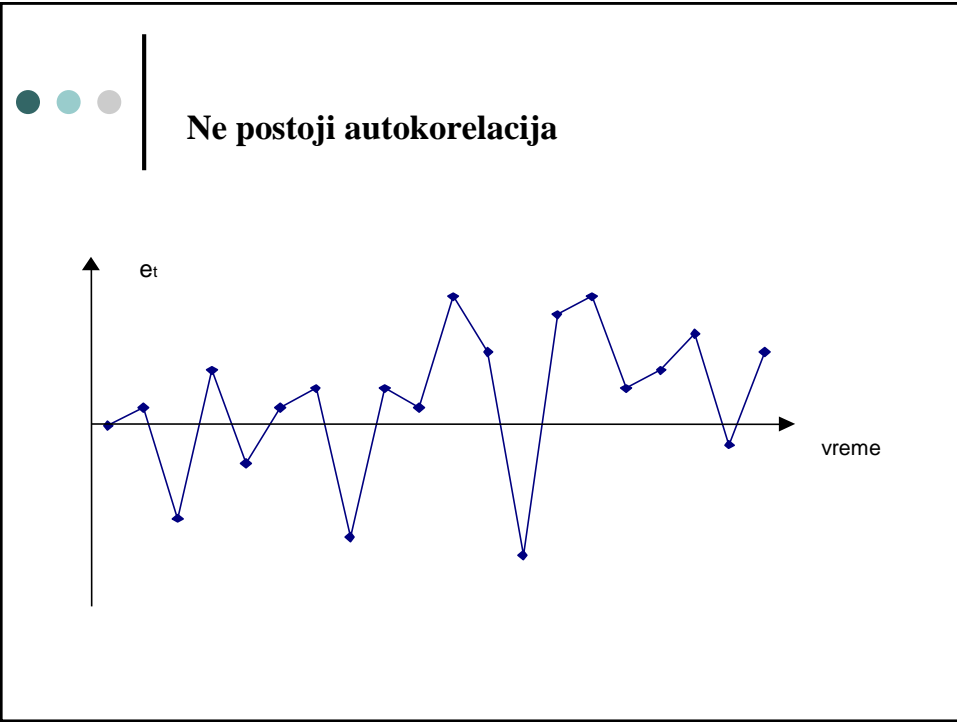
13



14




15



16






## Testiranje autokorelacije

- Da li postoji autokorelacija prvog reda?
  - Darbin-Votsonov test
- Da li postoji autokorelacija višeg reda?
  - Brojš-Godfrijev test ili Godfri-Brojšov test

17



## Ispitivanje postojanja autokorelacije: Darbin-Votsonov (engl. Durbin-Watson) test

- Darbin-Votsonov test (DW) se koristi za proveru postojanja autokorelacije prvog reda:
 
$$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + v_t$$

$v_t : N(0, \sigma_v^2)$  i  $\rho$  je autokorelacioni koeficijent prvog reda, koji se nalazi u intervalu  $(-1,+1)$ .
- Za  $\rho$  važi:
  - $\rho = 0$ , ne postoji autokorelacija,
  - $\rho = 1$ , ekstremna pozitivna autokorelacija,
  - $\rho = -1$ , ekstremna negativna autokorelacija,
  - $0 < \rho < 1$ , pozitivna autokorelacija,
  - $-1 < \rho < 0$ , negativna autokorelacija.

18

● ● ● | **Darbin-Votsonov test: hipoteze**

$$\varepsilon_t = \rho\varepsilon_{t-1} + v_t$$

Relevantne hipoteze:

$H_0: \rho=0$  (nema autokorelacije)  
 $H_1: \rho \neq 0$  (postoji autokorelacija prvog reda)

19

● ● ● | **Darbin-Votsonov test: formula**

DW ili  $d$  test

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^T (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^T e_t^2}$$

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^T (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^T e_t^2} = \frac{\sum_{t=2}^T e_t^2 - 2\sum_{t=2}^T e_t e_{t-1} + \sum_{t=2}^T e_{t-1}^2}{\sum_{t=1}^T e_t^2},$$

$$\sum_{t=1}^T e_t^2 \approx \sum_{t=2}^T e_t^2 \approx \sum_{t=2}^T e_{t-1}^2$$

$$DW \approx 2 \left( 1 - \frac{\sum_{t=2}^T e_t e_{t-1}}{\sum_{t=1}^T e_t^2} \right)$$

$$DW \approx 2(1 - \hat{\rho})$$

$e_t$  - reziduali iz modela ciju autokorelaciju ispitujemo  
 $\hat{\rho}$  - ocena autokorelacionog koeficijenta prvog reda.

20

● ● ●

### Darbin-Votsonov test: ocena autokorelacionog koeficijenta

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^T e_t e_{t-1}}{\sum_{t=1}^T e_t^2} = ?$$

$$\varepsilon_t = \rho \varepsilon_{t-1} + v_t \Rightarrow \hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^T \varepsilon_t \varepsilon_{t-1}}{\sum_{t=2}^T \varepsilon_{t-1}^2}$$

U praksi:

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^T e_t e_{t-1}}{\sum_{t=2}^T e_{t-1}^2} \approx \frac{\sum_{t=2}^T e_t e_{t-1}}{\sum_{t=1}^T e_t^2}$$

zbog

$$\sum_{t=1}^T e_t^2 \approx \sum_{t=2}^T e_t^2 \approx \sum_{t=2}^T e_{t-1}^2$$

21

● ● ●

### Darbin-Votsonov test: formula (II)

$$DW \approx 2(1 - \hat{\rho})$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{\rho} = 1 \Rightarrow DW = 0 \\ \hat{\rho} = -1 \Rightarrow DW = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 \leq DW \leq 4$$

$\hat{\rho} = 0 \Rightarrow DW = 2$  Nema autokorelacije

$0 < \hat{\rho} < 1 \Rightarrow 0 < DW < 2$  Test pozitivne autokorelacije

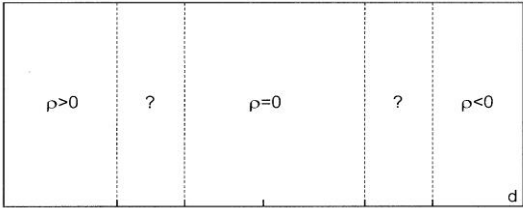
$-1 < \hat{\rho} < 0 \Rightarrow 2 < DW < 4$  Test negativne autokorelacije

- U postupku testiranja koriste se kritične vrednosti koje su autori testa označili kao donja i gornja kritična vrednost.
- Donja kritična vrednost:  $dd$
- Gornja kritična vrednost:  $dg$
- Kritične vrednosti zavise od obima uzorka i broja objašnjavajućih promenljivih.

22

### Darbin-Votsonov test: algoritam testiranja za pozitivnu autokorelaciju

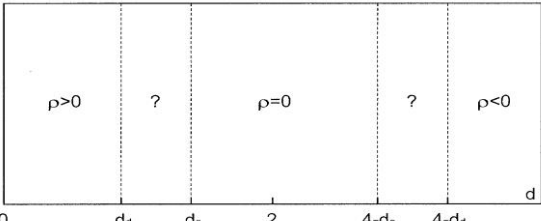
- Ako je  $DW < 2$ , ispitujemo postojanje (+) autokorelacije
  - $H_0: \rho = 0$  (nema autokorelacije)
  - $H_1: \rho > 0$  (postoji pozitivna autokorelacija prvog reda)
- Algoritam:
  - Kada je  $dg < DW < 2$ , tada ne postoji autokorelacija
  - Kada je  $dd < DW < dg$ , tada test ostaje bez odluke
  - Kada je  $0 < DW < dd$ , tada postoji pozitivna autokorelacija




23

### Darbin-Votsonov test: algoritam testiranja za negativnu autokorelaciju

- Ako je  $DW > 2$ , ispitujemo postojanje (-) autokorelacije
  - $H_0: \rho = 0$  (nema autokorelacije)
  - $H_1: \rho < 0$  (postoji negativna autokorelacija prvog reda)
- Algoritam:
  - Kada je  $2 < DW < 4 - dg$ , tada ne postoji autokorelacija
  - Kada je  $4 - dg < DW < 4 - dd$ , tada test ostaje bez odluke
  - Kada je  $4 - dd < DW < 4$ , tada postoji negativna autokorelacija



24




### Darbin-Votsonov test: ograničenja u primeni

1. Postoje situacije kada se primenom testa ne može doneti precizan zaključak.
2. Test je definisan samo za model sa slobodnim članom.
3. Testom se ne može proveriti postojanje autokorelacije većeg reda.
4. Test nije pouzdan u situaciji kada se kao objašnjavajuća promenljiva javlja zavisna sa docnjom:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \gamma_1 Y_{t-1} + \text{slučajan član}$$

25



### Opšti test autokorelacije: Godfri-Brojšov (engl. Godfrey-Breusch) test

- U opštem slučaju autokorelacija može biti reda  $k$ :

$$\varepsilon_t = \rho_1 \varepsilon_{t-1} + \rho_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \rho_k \varepsilon_{t-k} + v_t, v_t: N(0, \sigma_v^2)$$


- Nulta i alternativna hipoteza:

$$H_0: \rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_k = 0$$

(ne postoji autokorelacija)

$$H_1: H_0 \text{ nije tačno - bar jedan od parametara je različit od nule - postoji autokorelacija.}$$

26




### Godfri-Brojšov test: algoritam

1. Pretpostavimo da je polazni model oblika:  

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + \varepsilon_t$$
2. Ocenjujemo model iz 1, dobijamo rezidualne i potom ocenjujemo pomoćnu regresiju:  

$$e_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + \rho_1 e_{t-1} + \rho_2 e_{t-2} + \dots + \rho_k e_{t-k} + v_t$$
3. Računamo koeficijent determinacije  $R^2$  iz pomoćne regresije i potom ga množimo obimom uzorka  $T$  ( $TR^2$ ). To je Godfri-Brojšova test-statistika.
4. Oznaka:  $GB(k)$ .
5. Može se pokazati da važi:  $GB(k): \chi^2$  sa  $k$  stepeni slobode, pri uslovu istinitosti nulte hipoteze.


27



### Kako se eliminiše uticaj autokorelacije?

1. Korekcija polaznog modela u pravcu transformisanja promenljivih  
 Na tabli
2. Korekcija standardnih grešaka ocena kako bi odražavale stvarni varijabilitet ocena parametara: Njui-Vestova korekcija (engl. Newey-West).

28




**Njui-Vestova (engl. Newey – West) korekcija**

- Ocena varijanse ocene parametra modela koja se dobija metodom ONK množi se ocenom korektivnog faktorom kojim se eksplicitno uključuje informacija o tipu autokorelacije.
- Vrlo popularan pristup u modeliranju.

$$v(b)^A = v(b)F$$

$$s_{kb}^2 = \hat{v}(b)^A = s_b^2 \hat{F}$$

29



**Primer: početni model (primer 8.1. Udžbenik)**

- Na osnovu kvartalnih (log) podataka u periodu: I kvartal, 2005 – I kvartal 2008. godine, ocenjena je zavisnost tražnje za kreditima privatnog sektora od realnog BDP u Srbiji:

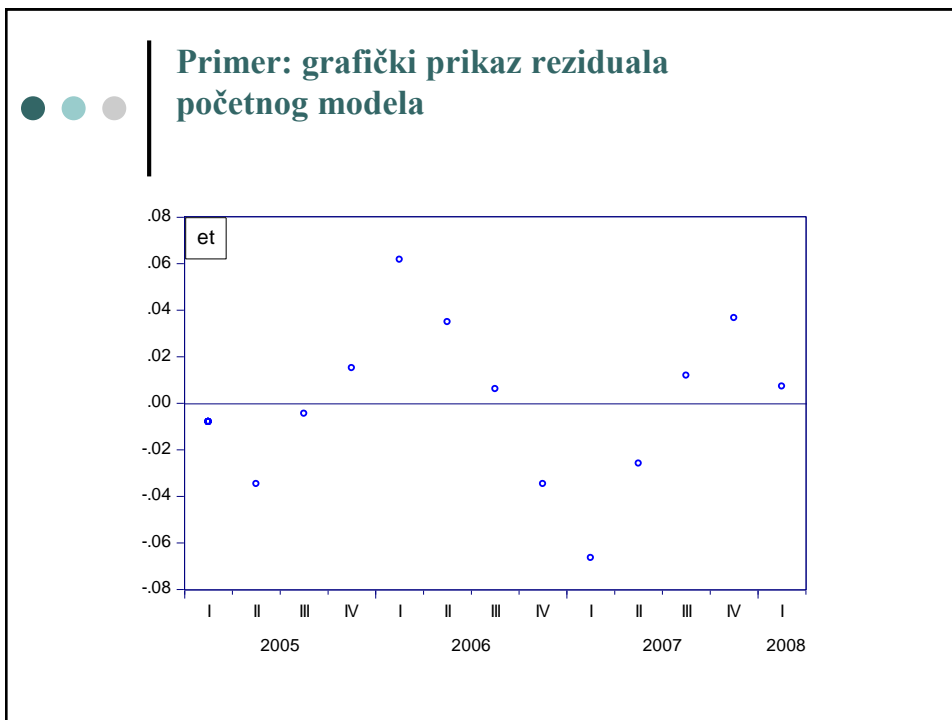
$$\hat{Y}_t = -4.35 + 1.60X_t \quad R^2 = 0.90$$

(0.16)

- Vrednost DW statistike:  $d=0.91$ .

$$T = 13, \quad d_d = 1.01, \quad d_g = 1.34.$$

30



31

**Primer: transformisani model**

$$\hat{\rho} = 1 - 0.5 * d = 1 - 0.5 * 0.91 = 0.55$$

$$X_t^* = X_t - 0.55 \cdot X_{t-1}$$

$$Y_t^* = Y_t - 0.55 \cdot Y_{t-1}$$

$$\hat{Y}_t^* = -1.43 + 1.36 X_t^* \quad R^2 = 0.64$$

(0.32)

- Nova vrednost DW statistike:  $d=1.09$ .

$$T = 12, \quad d_d = 0.97, \quad d_g = 1.33.$$

32