- **Heteroskedastičnost**

- **Zorica Mladenović**

1

1

Pretpostavke KLRM

1. $E(\varepsilon_i) = 0$
2. $v(\varepsilon_i) = \sigma^2 = \text{const.}$
3. $Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ za i različito od j
4. Objašnjavajuće promenljive nisu određene stohastičkim članom
5. $\varepsilon_i : N(0,\sigma^2)$
6. Ne postoji tačna linearna zavisnost između objašnjavajućih promenljivih.

2

Šta ako su pretpostavke KLRM narušene?

- Kada dolazi do narušavanja pretpostavki?
- Kako se to odražava na ocene parametara i na standardne greške ocena?
- Kako se ispituje da li su pretpostavke narušene ili ne?
- Šta raditi u slučaju kada su pretpostavke narušene?

3

Pretpostavka KLRM vezana za heteroskedastičnost

1. $E(\varepsilon_i) = 0$
2. **$v(\varepsilon_i) = \sigma^2 = \text{const.}$**
3. $Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ za i različito od j
4. Objašnjavajuće promenljive nisu određene stohastičkim članom
5. $\varepsilon_i : N(0,\sigma^2)$
6. Ne postoji tačna linearna zavisnost između objašnjavajućih promenljivih.

4

Pretpostavka 2: v(ε_i) = σ^2 = const. za svako i

Homoskedastičnost

- **Homoskedastičnost:** varijansa slučajne greške modela je konstantna za sve opservacije.

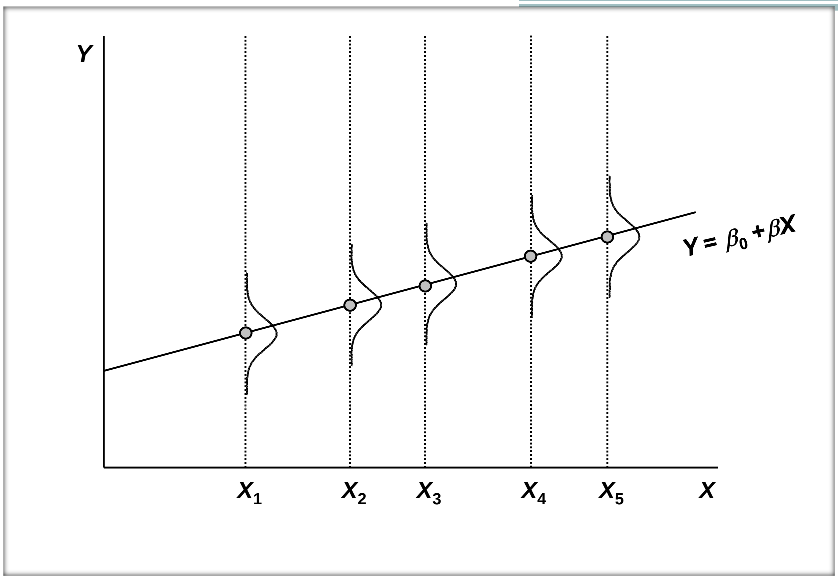
$$\mathrm{v}(\varepsilon_1) = \mathrm{v}(\varepsilon_2) = \ldots = \mathrm{v}(\varepsilon_n) = \sigma^2 = const$$

- **Heteroskedastičnost**: pretpostavka o homoskedastičnosti je narušena, što znači da se varijanse slučajnih greški razlikuju po pojedinim opservacijama:

$$\left.\begin{matrix} \mathrm{v}(\varepsilon_1) = \sigma_1^2 \\ \mathrm{v}(\varepsilon_2) = \sigma_2^2 \\ \vdots \\ \mathrm{v}(\varepsilon_n) = \sigma_n^2 \end{matrix}\right\} \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \neq \ldots \neq \sigma_n^2$$

5

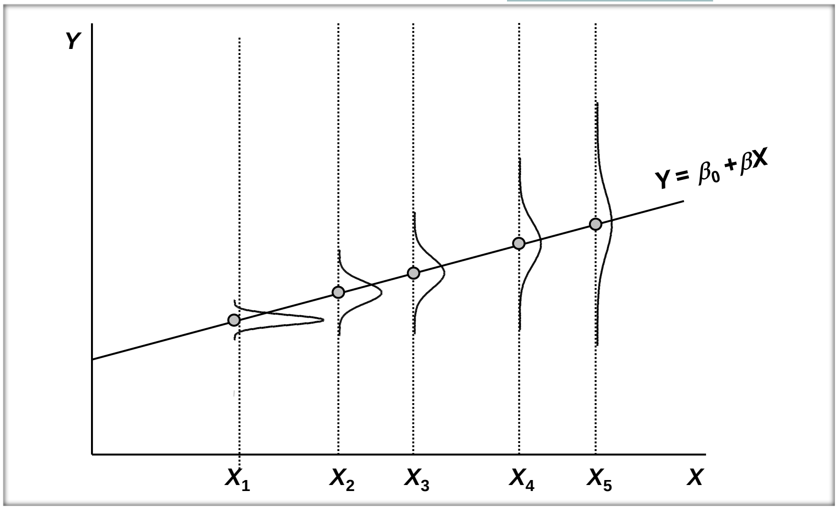
HOMOSKEDASTIČNOST



7

6

HETEROSKEDASTIČNOST



11

7

Posledice primene metoda ONK u prisustvu heteroskedastičnosti

- Primenom metoda ONK na model sa heteroskedastičnim greškama dobijaju se ocene koje nisu najbolje linearne nepristrasne ocene.
  - Ocene su nepristrasne
  - Ocene nisu efikasne – njihova varijansa nije najmanja moguća.
- Posledice (biće pokazano):
  - Standardne greške ocena nisu precizna mera varijabiliteta ocena.
  - Standardne greške ocena najčešće potcenjuju stvarnu varijansu ocena parametara modela.
  - t-odnosi su nepouzdani (najčešće precenjeni).
  - Intervalne ocene parametara su nedovoljno široke.

8

Kako se proverava postojanje heteroskedastičnosti?

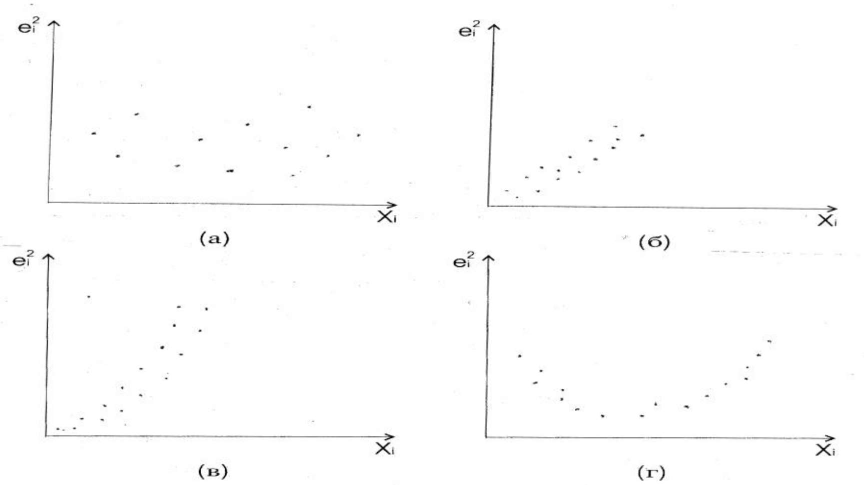
1. Neformalni (grafički) metodi

2. Formalni metodi (testiranje)

9

Neformalni (grafički metodi):

- Dijagram rasturanja tačaka kvadriranih reziduala u odnosu na objašnjavajuću promenljivu



10

Testiranje postojanja heteroskedastičnosti (formalni testovi)

- Goldfeld-Kvantov (engl. Goldfeld-Quandt) test
- Glejzerov (engl. Glejser) test
- Vajtov (engl. White) test.

11

Vajtov test (WH test)

Nulta hipoteza: slučajne greške imaju stabilnu varijansu

Alternativna hipoteza: varijansa slučajne greške je zavisna od objašnjavajućih promenljivih, njihovih kvadrata i međuproizvoda

$$H_0: \ \mathrm{v}(\varepsilon_i) = \sigma^2 = const. \ \ \mathrm{i=1,2,...,n}$$
$$H_1: \ \mathrm{v}(\varepsilon_i) = \sigma_i^2 \neq const. \ \mathrm{i=1,2,...,n.}$$

12

Vajtov test (II)

Algoritam:

1. Pretpostavimo da je polazni model oblika:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \varepsilon_i.$$

2. Ocenjujemo model iz 1, dobijamo reziduale i potom ocenjujemo pomoćnu regresiju:

$$e_i^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{1i} + \alpha_2 X_{2i} + \alpha_3 X_{1i}^2 + \alpha_4 X_{2i}^2 + \alpha_5 X_{1i} X_{2i} + v_i$$

3. Faktički, nulta hipoteza se svodi na:

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0$$

13

Vajtov test (III)

4. Određujemo koeficijent determinacije R^2 iz pomoćne regresije i potom ga množimo obimom uzorka T. To je (WH=$T R^2$) Vajtova test-statistika. Može se pokazati da pri istinitosti nulte hipoteze važi: $T R^2 : \chi^2$ sa *m stepeni slobode* i *m* je broj objašnjavajućih promenljivih pomoćne regresije bez slobodnog člana (*m*=*5*).

5. Ako je izračunata vrednost test-statistike veća od korespondirajuće kritične vrednosti χ^2 testa na datom nivou značajnosti tada se odbacuje nulta hipoteza o odsustvu heteroskedastičnosti.

14

Kako se eliminiše uticaj heteroskedastičnosti?

1. Transformacija polaznog modela u cilju dobijanja homoskedastičnih grešaka i potom primena metoda ONK.

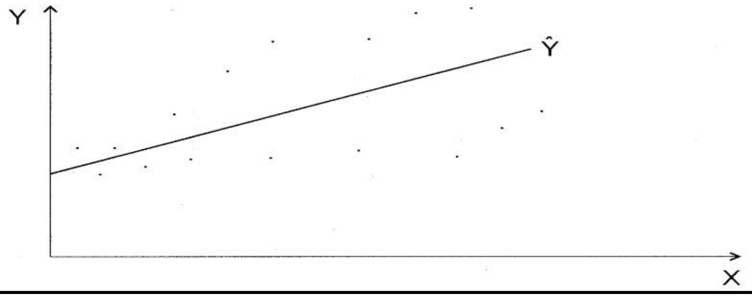
   Metod ponderisanih najmanjih kvadrata.

2. Korekcija standardnih grešaka ocena parametara u polaznom modelu koji je već ocenjen metodom ONK.

15

Transformacija polaznog modela: osnovna ideja

- Primenjuje se metod ponderisanih najmanjih kvadrata.
- Ideja: u postupku minimiziranja sume kvadrata reziduala onim rezidualima koji su po apsolutnoj vrednosti veći daje se manji ponder i obratno.



16

Transformacija polaznog modela: osnovna ideja II

- Pretpostavimo da postoji zavisnost standardne devijacije slučajne greške od objašnjavajuće promenljive X_i

$$\sigma_i = KX_i \,,\; K = const.$$

- Sve promenljive modela delimo sa merom varijabiliteta X_i

$$\frac{Y_i}{X_i} = \beta_0 \frac{1}{X_i} + \beta \frac{X_i}{X_i} + \frac{\varepsilon_i}{X_i}$$

- U ovom modelu nova slučajna greška je $\frac{\varepsilon_i}{X_i}$
- Njena varijansa je stabilna:

$$\mathrm{v}\left(\frac{\varepsilon_i}{X_i}\right) = \frac{\mathrm{v}(\varepsilon_i)}{X_i^2} = \frac{K^2 X_i^2}{X_i^2} = K^2 = const.$$

17

Transformacija polaznog modela: osnovna ideja III

- Metod ONK se primenjuje na nove reziduale koji se dobijaju tako što se stari reziduali množe sa ponderima

$$\frac{1}{X_i}$$

- Što su vrednosti objašnjavajuće promenljive X_i veće, to je varijabilitet slučajne greške veći, ali je zato udeo reziduala

$$\frac{e_i}{X_i}$$

u ukupnoj sumi kvadrata reziduala manji.
- **Time se postiže preciznost u postavljanju prave**.

18

Transformacija polaznog modela: svi slučajevi

I Poznata je varijansa svih slučajnih greški.

$$Y_i = \beta_0 + \beta\, X_i + \varepsilon_i$$

$$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \neq \cdots \neq \sigma_n^2.$$

- Sve promenljive modela delimo sa odgovarajućom standardnom devijacijom

$$\frac{Y_i}{\sigma_i} = \beta_0 \frac{1}{\sigma_i} + \beta \frac{X_i}{\sigma_i} + \frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}$$

- nova slučajna greška je stabilna:

$$\mathrm{v}\left(\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}\right) = \frac{\mathrm{v}(\varepsilon_i)}{\sigma_i^2} = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2} = 1.$$

19

Transformacija polaznog modela: svi slučajevi

II Standardna devijacija slučajne greške zavisi od objašnjavajuće promenljive X_i

$$\sigma_i = KX_i\,,\ K = const.$$

- Već razmatrano.

20

Transformacija polaznog modela: svi slučajevi

III Standardna devijacija slučajne greške proporcionalna je očekivanoj vrednosti zavisne promenljive. Relevantno kod višestrukog modela.

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \varepsilon_i$$

$$\sigma_i = CE\left(Y_i\right),\ C = const.$$

- Sve promenljive modela delimo sa očekivanom vrednošću zavisne promenljive

$$\frac{Y_i}{E\left(Y_i\right)} = \frac{\beta_0}{E\left(Y_i\right)} + \beta_1 \frac{X_{1i}}{E\left(Y_i\right)} + \beta_2 \frac{X_{2i}}{E\left(Y_i\right)} + \frac{\varepsilon_i}{E\left(Y_i\right)}$$

- Nove slučajne greške imaju identičnu varijansu:

$$\mathrm{v}\left(\frac{\varepsilon_i}{E\left(Y_i\right)}\right) = \frac{\mathrm{v}\left(\varepsilon_i\right)}{E\left(Y_i\right)^2} = \frac{C^2 E\left(Y_i\right)^2}{E\left(Y_i\right)^2} = C^2 = const.$$

21

Korekcija standardnih greški ocena parametara: Vajtova (engl. White) korekcija

- Izvor: White (1980) – najcitiraniji ekonomski rad poslednjih nekoliko decenija!!!
- U formuli za ocenu varijanse ocene nagiba **varijansa slučajne greške opservacije *i*** zamenjuje se **kvadratom reziduala te opservacije *i*.**

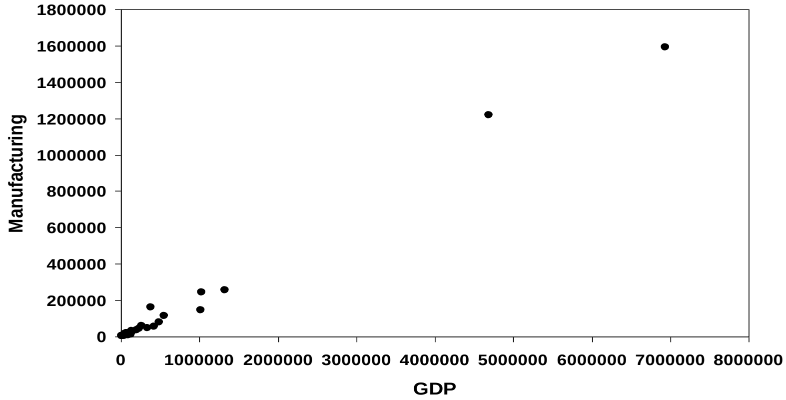
$$v(b)^H = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^2}$$

$$\hat{v}(b)^H = s^2{}_{kb} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 e_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^2}.$$

22

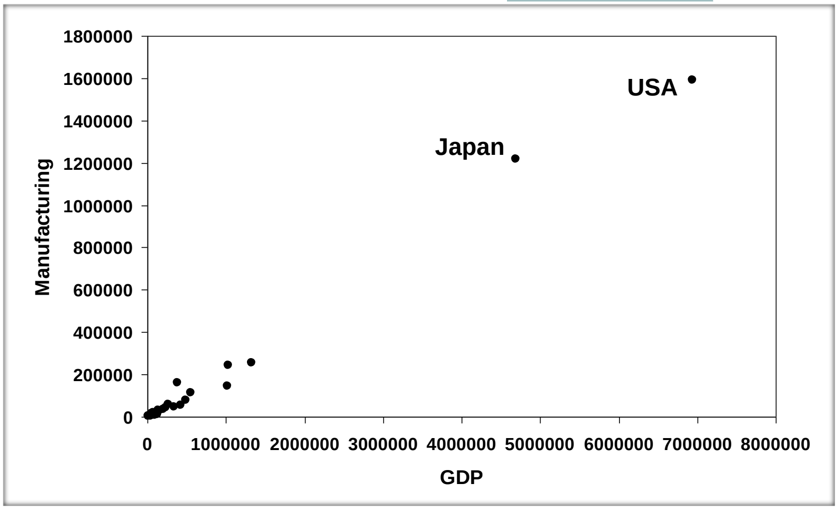
Primer: industrijska proizvodnja i BDP, milioni US$, za 30 zemalja u 1997. godini. Uzorak se odnosi na zemlje čiji je BDP per capita bar $2000.

Izvor: Dougherty, 2016



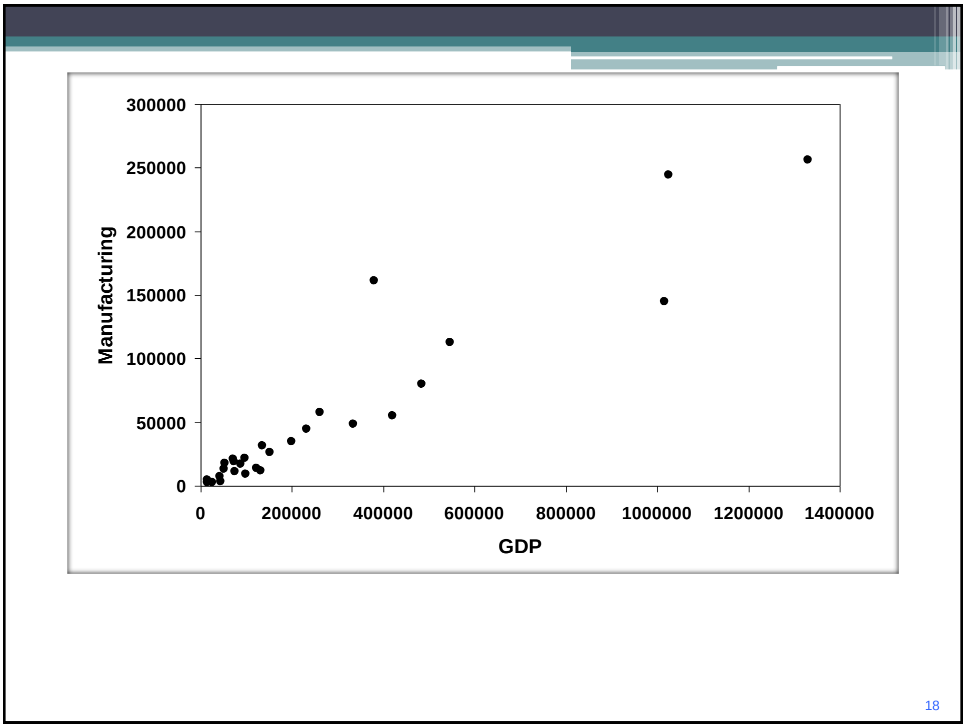
16

23

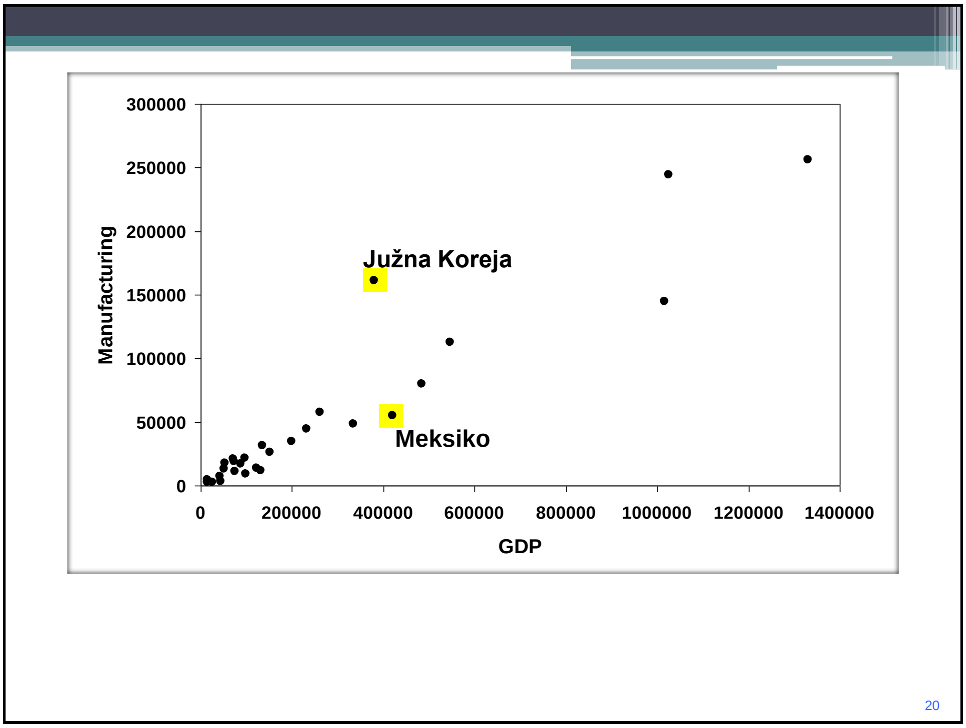


17

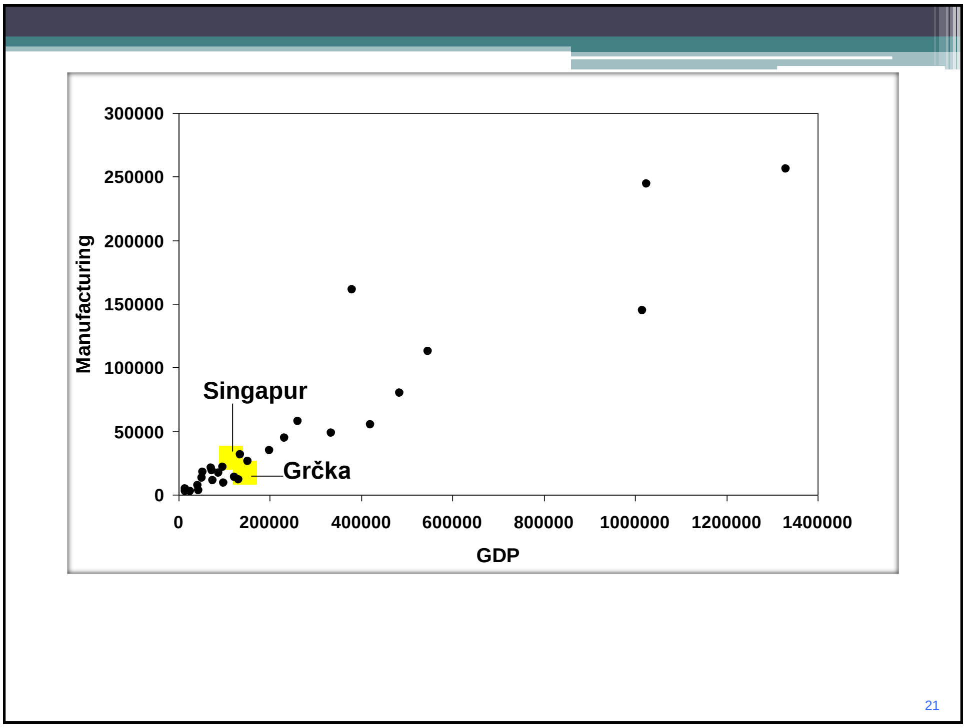
24


300000
250000
200000
150000
100000
50000
0
Manufacturing
0
200000
400000
600000
800000
1000000
1200000
1400000
GDP
18

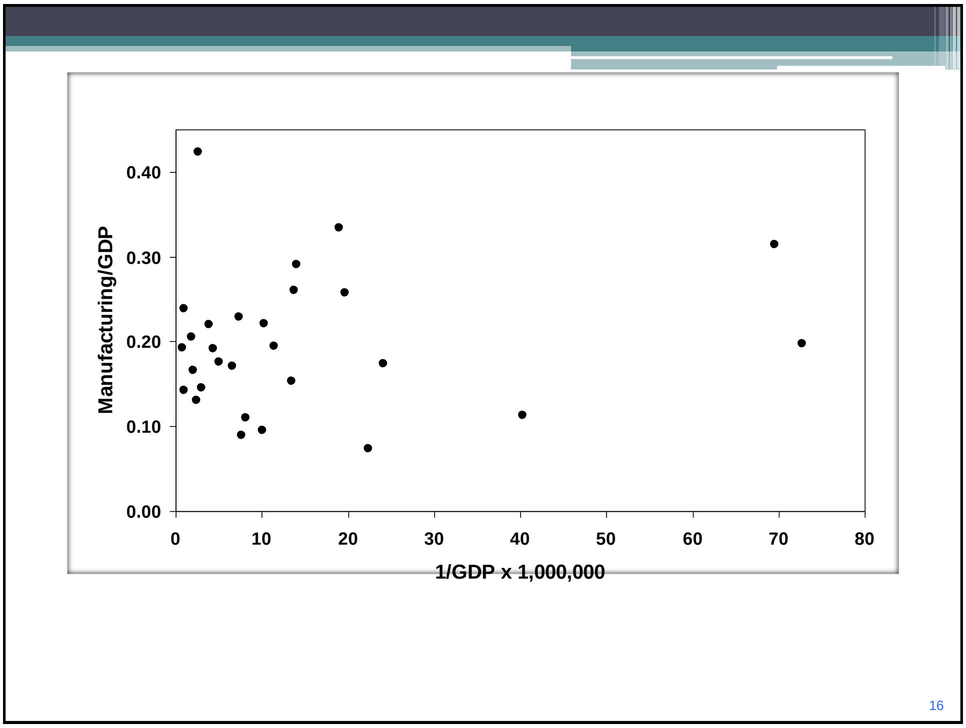
25


300000
250000
200000
150000
100000
50000
0
Manufacturing
Južna Koreja
Meksiko
0
200000
400000
600000
800000
1000000
1200000
1400000
GDP
20

26


300000
250000
200000
150000
100000
50000
0
Manufacturing
Singapur
Grčka
0
200000
400000
600000
800000
1000000
1200000
1400000
GDP
21

27


0.40
0.30
0.20
0.10
0.00
Manufacturing/GDP
0
10
20
30
40
50
60
70
80
1/GDP x 1,000,000
16

28