Izabrane teme višestrukog KLRM

TESTIRANJE LINEARNIH OGRANIČENJA NA PARAMETRE

ZORICA MLADENOVIĆ

1

1

Struktura

Linearno ograničenje na parametre modela
- Primeri
- Opšti pojam

Testiranje validnosti linearnih ograničenja na parametre modela
- t - test
- F – test
- Primeri

ZORICA MLADENOVIĆ 2

2

Primer I (prethodno korišćen)

Dati su godišnji podaci o potrošnji piva, relativnoj ceni piva i realnom dohotku na slučaj izabranih domaćinstava.

Prema uzorku od 20 godina ocenjeni su parametre cenovne i dohodne elastičnosti tražnje za pivom iz modela:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \varepsilon_i, \mathrm{i} = 1,2,\ldots,20$$

Promenljive

Y_i - *ln (potrošnja piva)*

X_{1i} - *ln (relativna cena piva)*

X_{2i} - *ln (realni nivo dohotka)*

3

$$\hat{Y}_i = -6.174 - 1.333 X_{1i} + 1.120 X_{2i}$$

- -1.333, cenovna elastičnost tražnje

Ako se **relativna cena poveća za 1%,** tada tražnja za pivom **opada za 1.33%**, pod pretpostavkom da nivo realnog dohotka ostaje nepromenjen

- 1.120, dohodna elastičnost tražnje

Ako se **realni dohodak poveća za 1%,** onda tražnja za pivom **raste za 1.12%,** pod prepostavkom da se ne menja cena piva.

4

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \varepsilon_i$$
$$\hat{Y}_i = -6.174 - 1.333 X_{1i} + 1.120 X_{2i}$$

- Novo pitanje:
- Da li možemo smatrati da je zbir cenovnog i dohodnog elasticiteta jedan nuli?
- Ako jeste, onda se istovremeno jednoprocentno povećanje cene i dohotka neutrališe.
- Formulacija iskaza da je zbir cenovnog i dohodnog elasticiteta jednak nuli:

$$\beta_1 + \beta_2 = 0$$

5

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \varepsilon_i$$
$$\hat{Y}_i = -6.174 - 1.333 X_{1i} + 1.120 X_{2i}$$

- Formulacija $\beta_1 + \beta_2 = 0$ predstavlja linearno ograničenje na parametre modela.
- Linearno ograničenje na parametre modela predstavlja linearnu vezu čiju valjanost testiramo postavkom sledećih hipoteza:
- $$H_0 : \beta_1 + \beta_2 = 0$$
  $$H_1 : \beta_1 + \beta_2 \neq 0.$$

6

Primer II

Posmatramo Cobb-Douglasovu proizvodnu funkciju za datu granu industrije:

$$Q = \beta_0 L^{\beta_1} K^{\beta_2} e^{\varepsilon}$$

Q – proizvodnja,

L – broj radnih časova,

K – vrednost kapitala.

- elastičnost proizvodnje u odnosu na rad: β_1
- elastičnost proizvodnje u odnosu na kapital: β_2

7

Primer II (a)

$$Q = \beta_0 L^{\beta_1} K^{\beta_2} e^{\varepsilon}$$

- Pitanje u formi linearnih ograničenja na parametre:
- Da li su u datoj grani industrije prinosi konstantni?
- Ako jeste, onda je zbir elastičnosti proizvodnje u odnosu na rad i elastičnosti proizvodnje u odnosu na kapital jednak jedan.
  - Proizvodnja raste proporcionalno rastu proizvodnih utrošaka.
- Formulacija iskaza da su prinosi konstantni:

$$\beta_1 + \beta_2 = 1$$

8

Primer II (a)

$$Q = \beta_0 L^{\beta_1} K^{\beta_2} e^{\varepsilon}$$

- I ovo je formulacija linearnog ograničenja na parametre:

$$\beta_1 + \beta_2 = 1 \Leftrightarrow \beta_1 + \beta_2 - 1 = 0$$

- Hipoteze od interesa:

$$H_0 : \beta_1 + \beta_2 = 1$$
$$H_1 : \beta_1 + \beta_2 \neq 1.$$

9

Primer II (b)

$$Q = \beta_0 L^{\beta_1} K^{\beta_2} e^{\varepsilon}$$

- Novo pitanje u formi linearnih ograničenja na parametre:
- Da li su u datoj grani industrije **jednake** vrednosti elastičnosti proizvodnje u odnosu na rad i elastičnosti proizvodnje u odnosu na kapital?
- Formulacija iskaza o jednakosti dva elasticiteta:

$$\beta_1 = \beta_2$$

10

Primer II (b)

$$Q = \beta_0 L^{\beta_1} K^{\beta_2} e^{\varepsilon}$$

- Formulacija linearnog ograničenja na parametre:

$$\beta_1 = \beta_2 \Leftrightarrow \beta_1 - \beta_2 = 0$$

- Hipoteze od interesa:

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2$$
$$H_1 : \beta_1 \neq \beta_2.$$

11

Testiranje validnosti linearnih ograničenja na parametre modela

- Može se ostvariti na dva načina. Koriste se:
  - t - test
  - F – test

ZORICA MLADENOVIĆ 12

12

Primena t-testa

$$H_0: \beta_1 + \beta_2 = 0$$
$$H_1: \beta_1 + \beta_2 \neq 0.$$

$$\varepsilon_i : N(0, \sigma^2)$$
$$Y_i : N(\beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i}, \sigma^2)$$
$$\left.\begin{array}{l} b_1 : N(\beta_1, v(b_1)) \\ b_2 : N(\beta_2, v(b_2)) \end{array}\right\} \Rightarrow b_1 + b_2 : N(\beta_1 + \beta_2, v(b_1 + b_2))$$
$$v(b_1 + b_2) = v(b_1) + v(b_2) + 2\operatorname{cov}(b_1, b_2)$$

ZORICA MLADENOVIĆ 13

13

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{(b_1 + b_2) - (\beta_1 + \beta_2)}{\sqrt{v(b_1 + b_2)}} : N(0,1) \\ H_0 : \beta_1 + \beta_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{b_1 + b_2 - 0}{\sqrt{v(b_1 + b_2)}} : N(0,1)$$

$$v(b_1 + b_2) = ?$$

1. Varijansa linearne kombinacije se zamenjuje ocenom varijanse linearne kombinacije: $\hat{v}(b_1 + b_2) = s^2_{(b_1+b_2)}$
2. Kvadratni koren, $s_{(b_1+b_2)}$, je standardna greška linearne kombinacije.
3. Relevantna test-statistika je $\dfrac{b_1 + b_2}{s_{(b_1+b_2)}} : t_{n-k}, \; n\text{-}k = n - 3$

14

Test-statistika koju koristimo je:

$$t_{n-k} = \frac{b_1 + b_2}{s_{(b_1+b_2)}}$$

Ako je :

$$v(b_1 + b_2) = v(b_1) + v(b_2) + 2\operatorname{cov}(b_1, b_2)$$

onda za ocenu varijanse važi:

$$\hat{v}(b_1 + b_2) = \hat{v}(b_1) + \hat{v}(b_2) + 2\,\widehat{\operatorname{cov}}(b_1, b_2)$$

ili samo drugačije označeno:

$$s^2_{(b_1+b_2)} = s^2_{b_1} + s^2_{b_2} + 2\,\widehat{\operatorname{cov}}(b_1, b_2)$$

tako da za imenilac test-statistike imamo

$$s_{(b_1+b_2)} = \sqrt{s^2_{(b_1+b_2)}}$$

15

15

Kako dolazimo do vrednosti u imeniocu, $s_{(b_1+b_2)}$?

$$s^2_{(b_1+b_2)} = s^2_{(b_1)} + s^2_{(b_2)} + 2\,\widehat{\operatorname{cov}}(b_1, b_2)$$

$$s_{(b_1+b_2)} = \sqrt{s^2_{(b_1+b_2)}}$$

i

$$\widehat{\operatorname{cov}}(b_1, b_2) = -\frac{rs^2}{\left(1-r^2\right)\sqrt{\sum x_{1i}^2 \sum x_{2i}^2}} \rightarrow$$

$\rightarrow$ ocena kovarijanse izmedju ocena b_1 i b_2

$$s^2_{b_1} = \frac{s^2}{\left(1-r^2\right)\sum x_{1i}^2} \rightarrow \text{ocena varijanse ocene } b_1$$

$$s^2_{b_2} = \frac{s^2}{\left(1-r^2\right)\sum x_{2i}^2} \rightarrow \text{ocena varijanse ocene } b_2$$

16

16

Primer 7.2. Udžbenik
Da li je zbir dohodnog i cenovnog elasticiteta nula?

$$\hat{Y}_i = -6.17 - 1.33X_{1i} + 1.127X_{2i}\ ,\ r = 0.89 \Rightarrow r^2 = 0.79,\ s^2 = 0.001838$$
$$\qquad\qquad (0.113) \qquad (0.127)$$

$$\hat{\text{cov}}(b_1, b_2) = -\frac{rs^2}{(1-r^2)\sqrt{\sum x_{1i}^2 \sum x_{2i}^2}} = -\frac{0.89 \cdot 0.001838}{(1-0.79)\sqrt{0.685833 \cdot 0.543830}}$$

$$\hat{\text{cov}}(b_1, b_2) = -0.01276$$

$$s^2_{b_1} = 0.01276, s^2_{b_2} = 0.01609,$$

$$s^2_{(b_1+b_2)} = s^2_{b_1} + s^2_{b_2} + 2\hat{\text{cov}}(b_1, b_2) = 0.01276 + 0.01609 + 2 \cdot (-0.01276)$$

$$s^2_{(b_1+b_2)} = 0.00333 \Rightarrow s_{(b_1+b_2)} = 0.058$$

17

17

Primer 7.2. Udžbenik II

$$\hat{Y}_i = -6.17 - 1.33X_{1i} + 1.12X_{2i}\ ,$$
$$\qquad\qquad (0.113) \qquad (0.127)$$

$$H_0 : \beta_1 + \beta_2 = 0$$
$$H_1 : \beta_1 + \beta_2 \neq 0.$$

$$\left.\begin{array}{l} t_{n-3} = \dfrac{b_1 + b_2}{s_{(b_1+b_2)}} = \dfrac{-1.33 + 1.12}{0.058} = -3.62 \\ t_{17}(0.025) = 2.11 \end{array}\right\} \Rightarrow |-3.62| > 2.11\ \text{H}_0\ \text{SE NE USVAJA.}$$

- Da li možemo smatrati da je zbir cenovnog i dohodnog elasticiteta jedan nuli?
- ODGOVOR: NE

18

18

Primena F-testa

$$H_0 : \beta_1 + \beta_2 = 0$$
$$\Rightarrow \beta_2 = -\beta_1$$
$$\Rightarrow Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \varepsilon_i$$
$$\Rightarrow Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} - \beta_1 X_{2i} + \varepsilon_i$$
$$\Rightarrow Y_i = \beta_0 + \beta_1 (X_{1i} - X_{2i}) + \varepsilon_i$$
$$\Rightarrow Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{3i} + \varepsilon_i$$
$$X_{3i} = X_{1i} - X_{2i}$$

Ovo je model sa ograničenjem na parametre modela.
Metod ONK primenjen pod ograničenjem H_0 :
metod ograničenih najmanjih kvadrata.

1. Ocenjuje se model
pod ograničenjem nulte hipoteze:

$$\widehat{Y}_i = b_0 + b_1 X_{3i}$$

i dobija se rezidualna suma kvadrata sa ograničenjem: $\sum e_o^2$

2. Ocenjuje se polazni model.
To je model bez ograničenja

$$\widehat{Y}_i = b_0 + b_1 X_{1i} + b_2 X_{2i}$$

Ovom modelu odgovara rezidualna suma kvadrata bez ograničenja: $\sum e_b^2$

3. Da li se dve rezidualne sume kvadrata značajno razlikuju? Ukoliko ne, onda je ograničenje verovatno opravdano.

4. Formalno testiranje:

$$F_B^g = \frac{\left(\sum e_o^2 - \sum e_b^2\right)/g}{\sum e_b^2 / B}$$

$g =$ broj ograničenja

$B =$ broj stepeni slobodne početnog modela

U datom primeru: $g=1, B=n-3$:

$$F_{n-3}^1 = \frac{\left(\sum e_o^2 - \sum e_b^2\right)/1}{\sum e_b^2 / (n-3)}$$

Primena F-testa: uopštenje

Model	Sa ograničenjem	Bez ograničenja
Rezidualna suma kvadrata	$\sum e_o^2$	$\sum e_b^2$
Broj ograničenja	g	-
Broj stepeni slobode	-	n-k

$$F_{n-k}^g = \frac{\left(\sum e_o^2 - \sum e_b^2\right)/g}{\sum e_b^2 / (n-k)}$$

g – *razlika između broja parametara dva modela*

Primena F-testa: rezime

- Testom se suštinski meri prirast rezidualne sume kvadrata usled nametanja linearnog ograničenja.
  - Primenom F-testa proveravamo da li je prirast statistički značajan ili ne.
    - Ako nije, ne odbacujemo nultu hipotezu i zaključujemo da je opravdano postavljanje linearnog ograničenja.
    - Ako jeste, odbacujemo nultu hipotezu i zaključujemo da linearno ograničenje nije validno.
- U slučaju jednog linearnog ograničenja, t i F test su alternativni.

ZORICA MLADENOVIĆ 23

23

Primena F-testa na bazi koeficijenta determinacije

$$R_o^2,\ R_b^2 \text{ - koef. determinacije}$$

$$F_{n-k}^{g} = \frac{\left(\sum e_o^2 - \sum e_b^2\right)/g}{\sum e_b^2/(n-k)} : \frac{\sum y^2}{\sum y^2}$$

$$F_{n-k}^{g} = \frac{\left(\sum e_o^2/\sum y^2 - \sum e_b^2/\sum y^2\right)/g}{\sum e_b^2/\sum y^2/(n-k)}$$

$$F_{n-k}^{g} = \frac{\left(\left(1-R_0^2\right)-\left(1-R_b^2\right)\right)/g}{(1-R_b^2)/(n-k)}$$

$$F_{n-k}^{g} = \frac{\left(R_b^2 - R_0^2\right)/g}{(1-R_b^2)/(n-k)}$$

ZORICA MLADENOVIĆ 24

24

Primer 7.2. Udžbenik
Da li je zbir dohodnog i cenovnog elasticiteta nula? III

Polazni model $\Leftrightarrow$ model bez ograničenja:

$$\hat{Y}_i = -6.17 - 1.33 X_{1i} + 1.127 X_{2i}, \quad \sum e_b^2 = 0.03125, n-k=17$$
$$(0.113) \qquad (0.127)$$

Model sa ograničenjem:

$$\hat{Y}_i = -8.35 - 1.33(X_{1i} - X_{2i}), \quad \sum e_o^2 = 0.05592,$$

$$F_{17}^1 = \frac{(0.05592 - 0.03125)/1}{0.03125/17} = 13.4 > F_{17}^1(0.05) = 4.45$$

$$13.4 \doteq (-3.62)^2.$$

- Ne možemo smatrati da je zbir cenovnog i dohodnog elasticiteta jedan nuli.

25

25

Primer 7.3.

- Posmatramo uzorak od 900 podataka koji je dobijen na osnovu anketiranja finansijskih analitičara u V. Britaniji (Asteriou and Hall, 2007). Ocenjen je model:

$$\ln \hat{Y}_i = 5.53 + 0.0731 X_{1i} + 0.0154 X_{2i} + 0.0130 X_{3i}, \ R^2 = 0.15$$
$$(0.0066) \qquad (0.0034) \qquad (0.0026)$$

$\hat{Y}_i$ – mesečna zarada, X_{1i} – godine školovanja,

X_{2i} – ukupne godine radnog staža,

X_{3i} – godine radnog staža provedene u istoj kompaniji.

- Interpretirati ocene parcijalnih koeficijenata nagiba.
- Ako je poznato: $\hat{\text{cov}}(b_2, b_3) = -0.00000220$ testirati hipotezu da ukupne godine radnog staža i godine radnog staža provedene u istoj kompaniji imaju istovetan uticaj na zaradu.

26

26