Klasični linearni regresioni model (KLRM)
- jednostavni -

Zorica Mladenović

1

Ključne teme

- Postavka i pretpostavke KLRM
- Svojstva ocena parametara u KLRM
- Elementi statističkog zaključivanja u KLRM
- Predviđanje u KLRM

2

Postavka i pretpostavke KLRM

Formulacija i pretpostavke klasičnog linearnog regresionog modela

- Posmatramo populacionu regresionu pravu:

$$Y_i = \beta_0 + \beta X_i + \varepsilon_i \text{ , } i=1,2,\ldots,n$$

- Zavisnost je linearna po postavci modela.
- Zavisna veličina Y_i predstavljena je zbirom:
  - Sistematske komponente, $\beta_0 + \beta X_i$ i
  - Slučajne komponente, ε_i
- Nivo Y_i dekomponuje se na deterministički i stohastički deo.

Formulacija i pretpostavke klasičnog linearnog regresionog modela (II)

- Kako Y_i zavisi od slučajne greške potrebno je definisati pretpostavke kojima se opisuju svojstva slučajne greške ε_i.
- Uvodi se ukupno 5 pretpostavki.
- Početni model zajedno sa pretpostavkama čini

  klasični linearni regresioni model

- Često se dodaje pridev ***jednostavni***, jer je polazni model jednostavni regresioni model.

5

Pretpostavke jednostavnog KLRM (I)

Redni broj pretpostavke	1.	2.	3.
Formulacija	Očekivana vrednost slučajne greške je nula	Slučajne greške su homoskedastične, odnosno poseduju istu varijansu	Slučajne greške su međusobno nekorelisane
Zapis	$E(\varepsilon_i)=0$ za svako i	$v(\varepsilon_i)=E(\varepsilon_i^2)=\sigma^2$ za svako i	$cov(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=E(\varepsilon_i\varepsilon_j)=0.$ za svako i , j koji su različiti.

6

Pretpostavke jednostavnog KLRM (II)

Redni broj pretpostavke	4.	5.
Formulacija	Slučajna greška ima normalnu raspodelu	Objašnjavajuća promenljiva nije slučajna promenljiva, već poseduje determinističku prirodu
Zapis	$\varepsilon_i : N(0,\sigma^2)$ *za svako i*	$cov(X_i,\varepsilon_i)=0$ *za svako i*

7

Detaljnije o svakoj od pretpostavki KLRM

- Smisao i implikacije pretpostavke.
- Šta ako je pretpostavka narušena?

8

Pretpostavka 1:
Očekivana vrednost slučajne greške je nula

- *Implikacija*:

  U proseku slučajna greška ne utiče na nivo zavisne promenljive

$$E(\varepsilon_i) = 0 \Rightarrow E(Y_i) = \beta_0 + \beta X_i$$

- *Ako je pretpostavka narušena:*

  Menja se početni smisao slobodnog člana:

$$E(\varepsilon_i) = k = const. \Rightarrow \varepsilon_i = k + u_i$$
$$Y_i = \beta_0 + \beta X_i + \varepsilon_i$$
$$Y_i = \underbrace{(\beta_0 + k)}_{sl.clan} + \beta X_i + u_i$$

9

Pretpostavka 2:
Varijansa slučajne greške je stabilna
Slučajne greške su homoskedastične

- *Implikacije*:

  1. Svaka slučajna greška ima istu varijansu nezavisno od vrednosti objašnjavajuće promenljive:

$$v(\varepsilon_1) = v(\varepsilon_2) = ... = v(\varepsilon_n) = \sigma^2 = const.$$

  2. Varijansa zavisne promenljive odgovara varijansi slučajne greške

$$v(\varepsilon_i) = \sigma^2 \Rightarrow v(Y_i) = E(Y_i - E(Y_i))^2 = E(\varepsilon_i^2) = \sigma^2.$$

10

Pretpostavka 2:
Varijansa slučajne greške je stabilna
Slučajne greške su homoskedastične

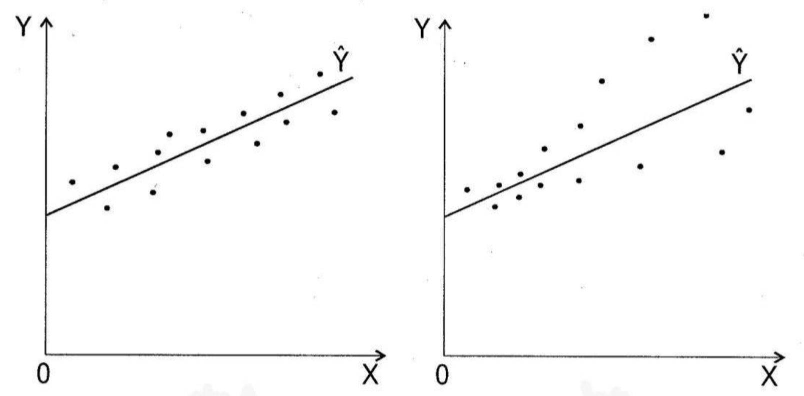
- *Ako je pretpostavka narušena*:
- Varijanse slučajnih greški razlikuju se po pojedinim opservacijama:

$$\left.\begin{aligned} &v(\varepsilon_1) = \sigma_1^2 \\ &v(\varepsilon_2) = \sigma_2^2 \\ &\vdots \\ &v(\varepsilon_n) = \sigma_n^2 \end{aligned}\right\} \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \neq \ldots \neq \sigma_n^2$$

- Slučajne greške su *heteroskedastične*
- Heteroskedastičnost se često javlja u podacima preseka.

11

Pretpostavka 2:
Levi grafik: homoskedastičnost
Desni grafik: heteroskedastičnost



12

Pretpostavka 3:
Slučajne greške su međusobno nekorelisane
Odsustvo autokorelacije

- *Implikacije*:
- Slučajne greške su nekorelisane

  Cov (ε_i , ε_j) = 0 za $i \neq j$
- Nema pravilnosti u korelacionoj strukturi slučajnih greški
- Pretpostavka se vezuje za podatke vremenskih serija. Elementi niza slučajnih grešaka su uređeni u odnosu na vreme:

  Cov (ε_t , ε_{t-j}) = 0 za $j=1,2,...$
  - Medjusobna povezanost se opisuje terminom *autokorelacija*.
  - Po ovoj pretpostavci autokorelacija je nula.

13

Pretpostavka 3:
Slučajne greške su međusobno nekorelisane
Odsustvo autokorelacije

- *Ako je pretpostavka narušena:*
- Postoji autokorelacija

  Slučajne greške su korelisane

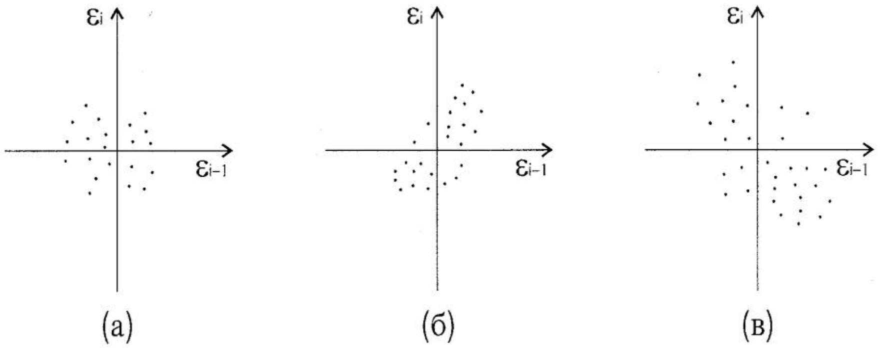
  Cov (ε_i , ε_j) $\neq 0$ za $i \neq j$

  i slede prepoznatljiv obrazac u kretanju
- U podacima vremenskih serija:
  - Slučajne greške koje su uređene tokom vremena su korelisane
  - Uobičajena oznaka:

    Cov (ε_t , ε_{t-j}) $\neq 0$ za $j=1,2,...$

14

Pretpostavka 3
(Odsustvo autokorelacije, pozitivna i negativna autokorelacija)



15

Pretpostavka 4:
Slučajna greška poseduje normalnu raspodelu

- *Implikacije*:

1. Slučajna greška obuhvata uticaj velikog broja međusobno nezavisnih i nepredvidljivih uticaja.
2. Centralna granična teorema: zbir velikog broja takvih činilaca aproksimira se normalnom raspodelom
3. Parametri normalne raspodele:

   Srednja vrednost je nula (1. pretpostavka)

   Varijansa je σ^2 (2. pretpostavka)

   Zapis: $\varepsilon_i : N\left(0,\sigma^2\right)$

16

Pretpostavka 4:
Slučajna greška poseduje normalnu raspodelu

- *Implikacije*:
  - Zavisna promenljiva takodje poseduje normalnu raspodelu
  - Parametri normalne raspodele Y_i

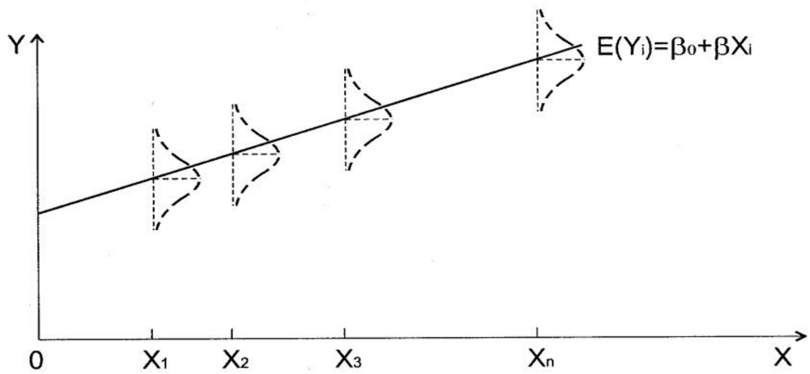
Srednja vrednost je $\beta_0 + \beta X_i$

Varijansa je σ^2

$$E(\varepsilon_i) = 0 \Rightarrow E(Y_i) = E(\beta_0 + \beta X_i + \varepsilon_i) = \beta_0 + \beta X_i.$$
$$v(\varepsilon_i) = \sigma^2 \Rightarrow v(Y_i) = E(Y_i - E(Y_i))^2$$
$$v(Y_i) = E(\beta_0 + \beta X_i + \varepsilon_i - \beta_0 - \beta X_i)^2 = E(\varepsilon_i)^2 = \sigma^2.$$
$$\varepsilon_i : N(0, \sigma^2)$$
$$\Rightarrow Y_i : N(\beta_0 + \beta X_i, \sigma^2).$$

17

Pretpostavke 1., 2. i 4.
Grafički prikaz



18

Pretpostavka 4:
Slučajna greška poseduje normalnu raspodelu

- *Ako je pretpostavka narušena*:

Slučajna greška nema normalnu raspodelu.

To je najčešće posledica pogrešne postavke modela. O tome kasnije.

19

Pretpostavka 5:
Objašnjavajuća promenljiva je deterministička

- *Implikacije*:
  - Objašnjavajuća promenljiva ima karakter egzogene veličine.
  - Ta veličina nije definisana unutar ekonomskog segmenta kojem pripada zavisna promenljiva.
  - Objašnjavajuća promenljiva nije korelisana sa slučajnom greškom.

- *Ako je pretpostavka narušena*:
  - Objašnjavajuća promenljiva je slučajna promenljiva i korelisana je sa slučajnom greškom
  - Definisana je unutar sistema: endogena veličina, kao i zavisna, jer je pod uticajem iste slučajne greške.
  - Menja se smisao ocene nagiba.

20

Implikacija navedenih pretpostavki na ocene parametara po metodu ONK

$$\varepsilon_i : N(0,\sigma^2), Y_i : N(\beta_0 + \beta X_i, \sigma^2),$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)\left(Y_i - \bar{Y}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)Y_i}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2} = \sum_{i=1}^{n} w_i Y_i,$$

$$w_i = \frac{\left(X_i - \bar{X}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2} = \frac{x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

- Ocena b je linearna funkcija slučajne promenljive Y_i
- Posledice:
  - **Ocena *b* je slučajna promenljiva**
  - **Ocena *b* ima normalnu raspodelu.**

21

Svojstva ocena dobijenih

primenom metoda ONK u KLRM

Karakteristike ocena parametara

Kako se meri varijansa ocena parametara?

22

Svojstva ocena koje su dobijene primenom metoda ONK

Ako su zadovoljene pretpostavke KLRM tada se primenom metoda ONK dobijaju

- *najbolje*
- *linearne*
- *nepristrasne*

ocene

(NLNO) koje su i

- *konzistentne*.

Bitni dokazi se izvode na tabli.

Kako merimo preciznost ocena?

- Svaki drugi uzorak daje nove ocene parametara. Ako se sa promenom uzorka ocene malo razlikuju, onda one imaju malu varijansu i obratno.
- Preciznost ocene se meri na osnovu ocene varijanse ocena.
- Kvadratni koren iz ocene varijanse je standardna greška ocene.
- Da bi se izračunale standardne greške ocena potrebno je prethodno oceniti varijabilitet slučajne greške modela.
- U pitanju je ocena parametra σ^2.

Ocena varijanse slučajne greške modela σ^2

- Varijansa slučajne greške ε_i je:

$$v(\varepsilon_i) = E[(\varepsilon_i)-E(\varepsilon_i)]^2 = \sigma^2$$

odnosno:

$$v(\varepsilon_i) = E(\varepsilon_i^{\,2})$$

- Ako bi slučajne greške bile poznate tada bi ocenu varijanse dobili na sledeći način:

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2$$

- Međutim, ne znamo vrednosti ε_i. Ali, poznate su nam vrednosti reziduala e_i:

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}e_i^2$$

Ova ocena je pristrasna ocena parametra σ^2.

25

Ocena varijanse slučajne greške modela (II)

- Nepristrasna ocena σ^2 je:

$$s^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}e_i^2$$

gde je rezidualna suma kvadrata $\sum_{i=1}^{n}e_i^2$ i n je obim uzorka.

Kvadratni koren, s, **je standardna greška regresije, odnosno standardna devijacija reziduala.**

- Sada možemo da analiziramo ocene varijansi ocena parametara b_0 i b.

- Oznake za ocene varijansi: $s^2 b_0$ i $s^2 b$

26

Ocene varijansi ocena parametara b_0 i b

$$v(b_0)=E\left(b_0-E(b_0)\right)^2=\ldots=\sigma^2\left(\frac{1}{n}+\frac{\bar{X}^2}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}\right)$$

$$v(b)=E\left(b-E(b)\right)^2=\ldots=\frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$$

$$\hat{v}(b_0)=s^2{}_{b_0}=s^2\left(\frac{1}{n}+\frac{\bar{X}^2}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}\right)\Rightarrow s_{b_0}=s\sqrt{\left(\frac{1}{n}+\frac{\bar{X}^2}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}\right)}$$

$$\hat{v}(b)=s^2{}_b=\frac{s^2}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}\Rightarrow s_b=\frac{s}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}}$$

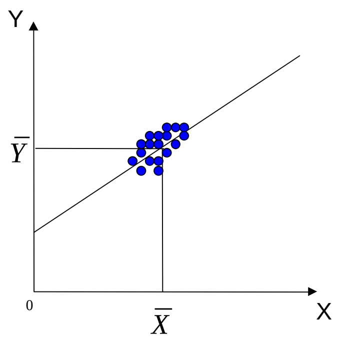
27

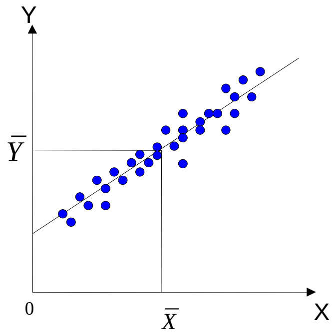
Standardne greške ocena parametara zavise od sledećih faktora:

1. **Varijabilitet modela (s^2 ili s)**. Što je veći varijabilitet modela, to je veći stepen raspršenosti slučajne greške modela, a time i veći varijabilitet zavisne promenljive *Y*. Rezultat: neprecizne ocene parametara.
2. **Suma kvadrata odstupanja *X* od aritmetičke sredine**. U pitanju je mera varijabiliteta objašnjavajuće promenljive. Veća vrednost ove sume utiče na povećanje preciznosti ocena, odnosno na pad njihovog varijabiliteta.
3. **Obim uzorka *n*.** Javlja se eksplicitno u imeniocu formule za standardnu grešku slobodnog člana i implicitno u imeniocu formule za obe ocene kroz zbir kvadrata odstupanja *X* od aritmetičke sredine. Veći obim uzorka pruža više informacija. Time se smanjuje varijabilitet ocena parametara.
4. Standardna greška ocene slobodnog člana zavisi i od **aritmetičke sredine podataka za *X*.** Podaci su udaljeniji od *y*-ose što je vrednost ove aritmetičke sredine veća. Rezultat: nepreciznija ocena slobodnog člana.

28

Šta se dešava ako je suma $\sum(x_i - \bar{x})^2$ relativno mala ili relativno velika?





29

Primer: izračunavanje odgovarajućih standardnih grešaka ocena u jednostavnom modelu

- Prethodno je ocenjena zavisnost potrošnje od dohotka iz 15 godina:

$$\left.\begin{aligned} b &= \frac{\sum_{i=1}^{15} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{15} x_i^2} = \frac{702.4}{1023.6} = 0.6862 \\ b_0 &= \bar{Y} - b\bar{X} = 52.4 - 0.6862 \cdot 64.6 = 8.0715 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \hat{Y}_i = 8.0715 + 0.6862 X_i$$

$$\sum_i e_i^2 = \sum_i y_i^2 - b^2 \sum_i x_i^2 = 519.6 - (0.6862)^2 \cdot 1023.6 = 37.617$$

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_i e_i^2}{\sum_i y_i^2} = 1 - \frac{37.617}{519.6} = 0.93$$

30

Primer: izračunavanje odgovarajućih standardnih grešaka ocena u jednostavnom modelu (II)

- Ocena varijanse slučajne greške modela:

$$s^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-2} = \frac{37.617}{13} = 2.894$$

- Ocena varijanse ocene nagiba:

$$s^2_b = \frac{s^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \frac{2.894}{1023.6} = 0.00283 \Rightarrow s_b = \sqrt{0.00283} = 0.053$$

- Ocena varijanse ocene slobodnog člana:

$$s^2_{b_0} = s^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \right) = 2.894 \left(\frac{1}{15} + \frac{64.6^2}{1023.6} \right) = 11.9915 \Rightarrow s_{b_0} = \sqrt{11.9915} = 3.463$$

31

Finalni zapis modela

- Uobičajeno se svi dobijeni rezultati zapisuju na sledeći način:

$$\hat{Y}_i = 8.0715 + 0.6862 X_i \qquad R^2 = 0.93$$
$$(3.463) \quad (0.053)$$

- Ispod ocena parametara navode se redom odgovarajuće standardne greške ocena.
- Desno od ocenjenog modela daje se vrednost koeficijenta determinacije.
- Model je “spreman” za statističku analizu testiranja hipoteza.

32

Elementi statističkog zaključivanja u KLRM

33

Statističko zaključivanje u KLRM

- Testiranje hipoteza o vrednostima parametara KLRM
- Formiranje intervalnih ocena parametara KLRM
- Prognoziranje budućih vrednosti zavisne promenljive

34

Testiranje hipoteze: osnovni elementi

- Interesuje nas da li parametar nagiba uzima tačno određenu vrednost.
- Postavljamo dve hipoteze: nultu (oznaka H_0) i alternativnu hipotezu (oznaka H_1).
- Nulta hipoteza je iskaz čiju valjanost ispitujemo, odnosno testiramo. Alternativna hipoteza obuhvata sva alternativna tvrđenja.
- Na primer, interesuje nas da li se zavisna promenljiva menja u istom obimu kao i objašnjavajuća, odnosno da li je β jednako 1. Koristimo sledeću notaciju:

$$H_0 : \beta = 1$$

$$H_1 : \beta \neq 1$$

35

Kako ostvariti diskriminaciju između hipoteza? Raspodela verovatnoće ocena dobijenih metodom ONK

- Ocene koje su dobijene primenom metoda ONK su i same normalno raspodeljene:

$$\varepsilon_i : N(0,\sigma^2)$$

$$Y_i : N(\beta_0 + \beta X_i, \sigma^2)$$

$$b : N(\beta, v(b))$$

$$b_0 : N(\beta_0, v(b_0))$$

36

Raspodela verovatnoće ocena dobijenih metodom ONK (II)

- Standardizovanjem slučajnih promenljivih b_0 i b dobijamo:

$$\frac{b_0 - \beta_0}{\sqrt{v(b_0)}} : N(0,1) \qquad \frac{b - \beta}{\sqrt{v(b)}} : N(0,1)$$

- Međutim, varijanse ocena v(b_0) i v(b) su su nepoznate veličine. Ako ih zamenimo odgovarajućim ocenama, tada dobijamo slučajne promenljive sa *t*-raspodelom (**izvodi se na tabli**)

$$\frac{b_0 - \beta_0}{s_{b_0}} : t_{n-2} \qquad \frac{b - \beta}{s_b} : t_{n-2}$$

37

Testiranje hipoteza: algoritam

- Posmatramo model oblika:

$$Y_i = \beta_0 + \beta X_i + \varepsilon_i, i = 1,2,...,n$$

- Testiramo validnost hipoteze:

$$\mathrm{H}_0 : \beta = \beta^* \text{ protiv } \mathrm{H}_1 : \beta \neq \beta^*$$

- ***Koraci u postupku testiranja:***

1. Ocenjujemo: b_0, b, $s(b_0)$ i $s(b)$ na poznati način.

2. Računamo test-statistiku koristeći sledeću formulu:

$$t = \frac{b - \beta^*}{s(b)} : t_{n-2}$$

gde je β^* vrednost β u uslovima važenja nulte hipoteze.

38

Testiranje hipoteza: algoritam (II)

3. Sastavni deo testiranja hipoteze je izbor **nivoa značajnosti**, koji se često označava sa α.

- To je verovatnoća odbacivanja nulte hipoteze u situaciji kada je ona tačna. Uobičajeno se koristi nivo značajnosti 5%.
- Nivo značajnosti određuje veličinu oblasti prihvatanja, odnosno neprihvatanja validnosti nulte hipoteze. Oblast odbacivanja nulte hipoteze je **kritična oblast testa.**

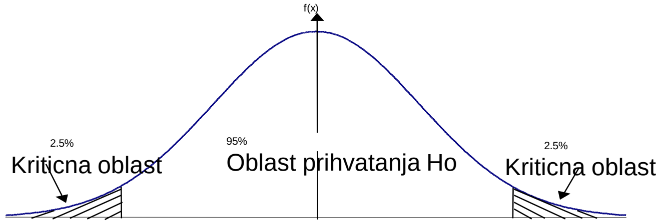
39

Testiranje hipoteza: algoritam (III)

4. Definišemo pravilo odlučivanja: kriterijum po kojem odbacujemo nultu hipotezu.

$$H_o: \ \beta = \beta^* \Rightarrow \frac{b-\beta^*}{s_b} : t_{n-2} \Rightarrow P\left(-t_{n-2}(\alpha/2) \leq \frac{b-\beta^*}{s_b} \leq t_{n-2}(\alpha/2)\right) = 1-\alpha$$

$$\alpha = 0.05, P\left(-t_{n-2}(0.025) \leq \frac{b-\beta^*}{s_b} \leq t_{n-2}(0.025)\right) = 0.95.$$



40

Testiranje hipoteza: algoritam (IV)

$$\frac{b-\beta^*}{s_b} \in \left(\pm t_{n-2}(0.025)\right) \Rightarrow$$

H_0 prihvatamo kao tacnu hipotezu

$$\frac{b-\beta^*}{s_b} \notin \left(\pm t_{n-2}(0.025)\right) \Rightarrow$$

H_0 odbacujemo kao netacnu hipotezu uz nivo znacajnosti 5%

Alternativna notacija

$$\left|\frac{b-\beta^*}{s_b}\right| > t_{n-2}(0.025) \Rightarrow$$

H_0 odbacujemo kao netacnu uz nivo znacajnosti 5%

41

Testiranje hipoteza: algoritam (V)

5. Sprovodimo testiranje:

- Ako izračunata test-statistika leži u oblasti prihvatanja nulte hipoteze, tada se nulta hipoteza ne odbacuje.
- Obratno, ako izračunata test-statistika pripada kritičnoj oblasti testa, tada nultu hipotezu odbacujemo za dati nivo značajnosti.

42

Primer testiranja hipoteza

- Podsećamo na ocenu modela:

$$\hat{Y}_i = 8.0715 + 0.6862 X_i \quad R^2 = 0.93$$
$$(3.463) \quad (0.053)$$

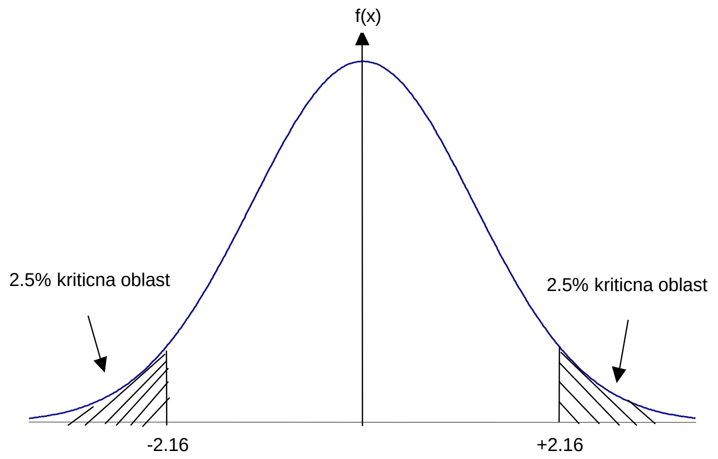
- Testiramo valjanost nulte hipoteze $H_0: \beta = 1$ protiv alternativne $H_1: \beta \neq 1$.

- Potrebna nam je kritična vrednost *t* raspodele za 15-2=13 stepeni slobode i nivo značajnosti 5%. Budući da je test dvostran i da je ukupna veličina kritične oblasti 5%, koristimo sledeću notaciju: $t_{13}(0.025)$ *ili* $t_{13}(2.5\%)$

- *Tablice:* $t_{13}(0.025)=2.16$

43

Određivanje kritične oblasti testa



44

Testiranje hipoteze

- Hipoteze:

  $H_0 : \beta = 1$
  $H_1 : \beta \neq 1$

- Izračunata test-statistika:

$$t = \frac{b - \beta^*}{s_b} = \frac{0.686 - 1}{0.053} = -5.92$$

- Kako je

$$|-5.92| > 2.16$$

  odbacujemo hipotezu H_0 na datom nivou značajnosti.
- Ne možemo smatrati da je marginalna sklonost na potrošnji jednaka vrednosti jedan.

45

Testiranje drugih hipoteza

- Može nas interesovati sledeće: $H_0 : \beta = 0$ ili $H_0 : \beta = 2$.
- $H_0 : \beta = 0$
  $H_1 : \beta \neq 0$
- $H_0 : \beta = 2$
  $H_1 : \beta \neq 2$

46

Specijalni tip hipoteze: *t*-odnos

- Opšti oblik testa koji smo koristili je:

$$t = \frac{b - \beta^*}{s_b}$$

- Pretpostavimo da nas interesuje

  $H_0 : \beta = 0$ protiv $H_1 : \beta \neq 0$.

- Ako je tačna nulta hipoteza, tada objašnjavajuća promenljiva **ne** utiče na kretanje zavisne promenljive.
- Time proveravamo opravdanost postavke modela.

47

Specijalni tip hipoteze: *t*-odnos (II)

- Test-statistika se naziva ***t*-odnos**, zato što za $\beta = 0$ test-statistika postaje odnos ocene i odgovarajuće standardne greške ocene:

$$t_b = \frac{b - 0}{s_b} = \frac{b}{s_b}$$

$$t_b = \frac{0.686}{0.053} = 12.94, \quad 12.94 > 2.16$$

$\Rightarrow H_1 : \beta \neq 0$ prihvata se kao tacno.

- Zaključak: dohodak (X) ostvaruje statistički značajan uticaj na potrošnju (Y).

48

Specijalni tip hipoteze: *t*-odnos (III)

- Opravdanost prisustva slobodnog člana proverava se prema ishodu testiranja sledećih hipoteza:

$$H_0 : \beta_0 = 0 \text{ protiv } H_1 : \beta_0 \neq 0$$

$$t_{b_0} = \frac{b_0}{s_{b_0}}$$

$$t_{b_0} = \frac{8.072}{3.463} = 2.33, \quad 2.33 > 2.16$$

$$\Rightarrow H_1 : \beta_0 \neq 0 \text{ prihvata se kao tacno.}$$

- Zaključak: u ocenjenom modelu potrebno je uključiti slobodan član.

49

Primer primene testiranja hipoteza

- ***Prethodni rezultat:***

- Na osnovu mesečnih podataka u periodu: januar 1998- decembar 2008. godina (132 podatka) ocenjen je model vrednovanja kapitala za stopu prinosa akcija kompanije *Microsoft*:

$$R_j - R_f = 0.01 + 1.26\left(R_m - R_f\right) + e, \quad \mathrm{R}^2 = 0.33$$

- Da li je rizik posedovanja ovih akcija jednak opštem tržišnom riziku?

- Da li je ocena slobodnog člana očekivana?

Primer primene testiranja hipoteza (II)

- ***Dodatni rezultat sadrži standardne greške ocena:***

$$R_j - R_f = \underset{(0.009)}{0.01} + \underset{(0.16)}{1.26}\left(R_m - R_f\right) + e, \quad \mathrm{R}^2 = 0.33$$

- Da li je rizik posedovanja ovih akcija jednak opštem tržišnom riziku? Odgovor: da, prema rezultatima testiranja.

$H_0 : \beta = 1,\ H_1 : \beta \neq 1$

$$\left.\begin{array}{l} t = \dfrac{b-1}{s_b} = \dfrac{1.26-1}{0.16} = 1.625 \\ t_{130} \approx N(0,1) \Rightarrow t_{130}(0.025) \approx 1.96 \\ 1.625 < 1.96 \end{array}\right\} \Rightarrow H_0 : \beta = 1 \text{ se ne odbacuje.}$$

Primer primene testiranja hipoteza (III)

- ***Dodatni rezultat:***

$$R_j - R_f = \underset{(0.009)}{0.01} + \underset{(0.16)}{1.26}\left(R_m - R_f\right) + e, \quad \mathrm{R}^2 = 0.33$$

- Da li je slobodan član statistički značajan? Odgovor: ne, prema rezultatima testiranja.

$H_0 : \beta_0 = 0,\ H_1 : \beta_0 \neq 0$

$$\left.\begin{array}{l} t = \dfrac{b_0}{s_{b_0}} = \dfrac{0.01}{0.009} = 1.11 \\ t_{130} \approx N(0,1) \Rightarrow t_{130}(0.025) \approx 1.96 \end{array}\right\} \Rightarrow H_0 : \beta_0 = 0 \text{ se ne odbacuje.}$$

Formiranje intervalnih ocena parametara

- Ocene parametara mogu biti tačkaste i intervalne.
- Do sada smo razmatrali samo tačkastu ocenu.
- Intervalna ocena parametra predstavlja *granice intervala unutar koga očekujemo stvarnu vrednost parametra* uz *određenu verovatnoću*.
- Koristimo poznati rezultat:

$$P\left(-t_{n-2}(\alpha/2) \le \frac{b-\beta}{s_b} \le t_{n-2}(\alpha/2)\right) = 1-\alpha$$

$$\alpha = 0.05, P\left(-t_{n-2}(0.025) \le \frac{b-\beta}{s_b} \le t_{n-2}(0.025)\right) = 0.95.$$

Formiranje intervalnih ocena parametara (II)

- Dvojnu nejednakost rešavamo u funkciji od nepoznatog parametra:

$$\alpha = 0.05,\ P\left(b - t_{n-2}(0.025)s_b \le \beta \le b + t_{n-2}(0.025)s_b\right) = 0.95.$$

- Intervalna ocena parametra nagiba sa verovatnoćom 95%:

$$\beta \in \left(b \pm t_{n-2}(0.025)s_b\right)$$

- Intervalna ocena parametra slobodnog člana sa verovatnoćom 95%:

$$\beta_0 \in \left(b_0 \pm t_{n-2}(0.025)s_{b_0}\right)$$

Primer obrazovanja intervalnih ocena nepoznatih parametara

- Rezultat prethodnog ocenjivanja:

$$\hat{Y}_i = 8.0715 + 0.6862 X_i$$
$$(3.463) \quad (0.053)$$

Intervalna ocena za	Tačkasta ocena	Stand. greš. ocene	t-krit.	Izračunavanje intervalne ocene	Intervalna ocena uz verovatnoću 95%
Beta	0.6862	0.053	2.16	$(0.6862 \pm 2.16 \cdot 0.053)$	$(0.572,\ 0.800)$
$Beta_0$	8.0715	3.463	2.16	$(8.0715 \pm 2.16 \cdot 3.463)$	$(0.591,\ 15.552)$