



# Ekonometrijski modeli

## Sistemi simultanih jednačina – Glava 11

---

Osnovne studije

Predavač: Aleksandra Nojković

# SSJ: Struktura predavanja

---

- **Uvod: osnovne definicije SSJ**
- **Posledice ignorisanja simultanosti**
- **Problem identifikacije**
- **Ocenjivanje sistema simultanih jednačina**

# Sistemi simultanih jednačina (SSJ)

---

- Do sada analizirani ekonometrijski modeli razmatrali su problem jedne zavisne promenljive ( $Y$ ) za date vrednosti objašnjavajućih promenljivih ( $X_1, X_2, \dots$ ), definisan u okviru jedne jednačine.
- Međutim, ekonomske promenljive su veoma često **međuzavisne**. Usled uzajamnog dejstva nije moguće fiksirati jednu promenljivu i posmatrati njen efekat na drugu (npr. cene utiču na tražnju, ali tražnja zajedno sa ponudom utiče na formiranje cena).
- Kako bi smo razmatrali ovakve slučajeve, neophodno je **posmatrati više jednačina u isto vreme**.

# Primer 1: Jednostavan makroekonomski model

---

- Sistem je definisan kao:

**potrošnja:**

$$C_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_t + \varepsilon_{1t}$$

**investicije:**

$$I_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + \beta_2 Y_{t-1} + \varepsilon_{2t}$$

**društveni proizvod:**

$$Y_t = C_t + I_t + G_t ,$$

gde se  $G_t$  odnosi na državne rashode.

- Sa tri jednačine definisane su tri promeljive određene unutar sistema, koje nazivamo **endogenim promenljivima**.
- Promeljiva državnih rashoda je određena van posmatranog sistema i naziva se **egzogeno promeljiva**, dok je  **$Y_{t-1}$  predeterminisana promeljiva** (endogena s pomakom).
- Prve dve jednačine opisuju **ponašanje ekonomskih subjekata**, dok je treća jednačina **identitet (definiciona jednačina)** – ne sadrži parametre za ocenjivanje.

## Primer:2 Model ponude i tražnje za određenim proizvodom

---

- Sistem:  
$$Q_t^P = \alpha_0 + \alpha_1 P_t + \varepsilon_t \quad - \text{ponuda}$$
$$Q_t^T = \beta_0 + \beta_1 P_t + \beta_2 Y_t + \varepsilon_t' \quad - \text{tražnja}$$
$$Q_t^P = Q_t^T \quad - \text{uslov ravnoteže}$$

gde je  $Q_t$  količina koja se nudi, odnosno traži,  $P_t$  je cena datog proizvoda, a  $Y_t$  raspoloživi dohodak.

- Ove tri jednačine, za dati dohodak, određuju ponuđenu i traženu količinu i cenu proizvoda, kad je tržište u ravnoteži. Ove promenljive određene unutar sistema nazivamo **endogenim promenljivima**.
- Promenljiva dohodak je određena van posmatranog sistema i naziva se **egzogenom promenljivom**.

# Strukturalna forma sistema

---

- Razmatrani modeli sastoje se od jednačina koje imaju jasnu ekonomsku interpretaciju.
- Ove jednačine se nazivaju **strukturne jednačine** (jednačine strukturne forme).
- Strukturnim jednačinama **se endogene promenljive** izražavaju kao funkcija **drugih endogenih** promenljivih, **predeterminisanih** promenljivih (egzogene i endogene promenljive s dočnjom) i grešaka.
- Strukturni parametri u svakoj jednačini mere **direktne efekte** objašnjavajućih promenljivih na zavisnu.

# Redukovana forma sistema 1

- Kada je broj jednačina jednak broju endogenih promenljivih (kompletan sistem), moguće ga je **rešiti po egzogenim** (predeterminisanim) promenljivima.
- Redukovana forma:

$$C_t = \frac{\alpha_0(1-\beta_1) + \alpha_1\beta_0}{1-\alpha_1-\beta_1} + \frac{\alpha_1\beta_2}{1-\alpha_1-\beta_1} Y_{t-1} + \frac{\alpha_1}{1-\alpha_1-\beta_1} G_t + \frac{1-\beta_1}{1-\alpha_1-\beta_1} \varepsilon_{1t} + \frac{\alpha_1}{1-\alpha_1-\beta_1} \varepsilon_{2t}$$
$$I_t = \frac{(1-\alpha_1)\beta_0 + \alpha_0\beta_1}{1-\alpha_1-\beta_1} + \frac{(1-\alpha_1)\beta_2}{1-\alpha_1-\beta_1} Y_{t-1} + \frac{\beta_1}{1-\alpha_1-\beta_1} G_t + \frac{\beta_1}{1-\alpha_1-\beta_1} \varepsilon_{1t} + \frac{1-\alpha_1}{1-\alpha_1-\beta_1} \varepsilon_{2t}$$
$$Y_t = \frac{\alpha_0 + \beta_0}{1-\alpha_1-\beta_1} + \frac{\beta_2}{1-\alpha_1-\beta_1} Y_{t-1} + \frac{1}{1-\alpha_1-\beta_1} G_t + \frac{1}{1-\alpha_1-\beta_1} \varepsilon_{1t} + \frac{1}{1-\alpha_1-\beta_1} \varepsilon_{2t}$$

## Redukovana forma sistema 2

---

- Redukovana forma:

$$P_t = -\frac{\alpha_0 - \beta_0}{\alpha_1 - \beta_1} + \frac{\beta_2}{\alpha_1 - \beta_1} Y_t + \frac{\varepsilon'_t - \varepsilon_t}{\alpha_1 - \beta_1}$$

$$Q_t = \frac{\alpha_1\beta_0 - \alpha_0\beta_1}{\alpha_1 - \beta_1} + \frac{\alpha_1\beta_2}{\alpha_1 - \beta_1} Y_t + \frac{\alpha_1\varepsilon'_t - \beta_1\varepsilon_t}{\alpha_1 - \beta_1},$$

gde je  $Q_t$  ujedno tražena i ponuđena količina.

- Koeficijenti redukovane forme **mere ukupne efekte** (direktne i indirektne) promena predeterminisanih prom. na endogene promenljive.



# Posledice ignorisanja simultatnosti I

- U strukturnoj formi narušena je pretpostavka KLRM da objašnjavajuće promenljive uzimaju fiksirane vrednosti (pokazati da postoji zavisnost greške jednačine i eksplanatorne promenljive).
- Npr. u jednačini potrošnje makroekonomskog modela (uz ispunjene pretpostavke o greškama obe jednačine-**definisati**) postoji korelisanost objašnjavajuće promenljive ( $Y_t$ ) i slučajne greške ( $\varepsilon_{1t}$ ):

$$\begin{aligned} \text{cov}(Y_t, \varepsilon_{1t}) &= E[(Y_t - E(Y_t))(\varepsilon_{1t} - E(\varepsilon_{1t}))] \\ &= E\left[\left(\frac{1}{1-\alpha_1-\beta_1} \varepsilon_{1t} + \frac{1}{1-\alpha_1-\beta_1} \varepsilon_{2t}\right) \varepsilon_{1t}\right] = \frac{1}{1-\alpha_1-\beta_1} \sigma_1^2 \neq 0. \end{aligned}$$

- Pokazati...

# Posledice ignorisanja simultatnosti II

- Slično tome, u sistemu ponude i tražnje, cena je slučajna promenljiva koja zavisi od  $\varepsilon_t$  i  $\varepsilon_t'$  (jasno se vidi iz redukovane forme).
- Jednostavno se pokazuje da postoji korelisanost objašnjavajuće promenljive  $P_t$ , sa greškama  $\varepsilon_t$  i  $\varepsilon_t'$  u obe jednačine.
- Primenom metoda ONK dobijaju se **pristrasne ocene** parametara strukturne forma **(pokazati)!**

# Posledice ignorisanja simultatnosti III

- Ocena parametra granične sklonosti ka potrošnji:

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{\sum_{t=1}^T c_t y_t}{\sum_{t=1}^T y_t^2} = \frac{\sum_{t=1}^T (\alpha_1 y_t + \varepsilon_{1t}) y_t}{\sum_{t=1}^T y_t^2} = \alpha_1 + \frac{\sum_{t=1}^T y_t \varepsilon_{1t}}{\sum_{t=1}^T y_t^2}.$$

- Očekivana vrednost ove ocene je:

$$E\left(\hat{\alpha}_1\right) = \alpha_1 + E\left(\frac{\sum_{t=1}^T y_t \varepsilon_{1t}}{\sum_{t=1}^T y_t^2}\right).$$

# Posledice ignorisanja simultatnosti IV

- Ocena je **pristrasna**, jer očekivana vrednost drugog sabirka nije jednaka nuli:

$$E\left(\sum_{t=1}^T y_t \varepsilon_{1t}\right) = \frac{1}{1 - \alpha_1 - \beta_1} \left[ \beta_2 \sum_{t=1}^T E(y_{t-1} \varepsilon_{1t}) + \sum_{t=1}^T E(g_t \varepsilon_{1t}) + \sum_{t=1}^T E(\varepsilon_{1t} \varepsilon_{2t}) + \sum_{t=1}^T E(\varepsilon_{1t}^2) \right].$$

- Pri tome, pristrasnost iznosi:

$$E\left(\sum_{t=1}^T y_t \varepsilon_{1t}\right) = \frac{1}{1 - \alpha_1 - \beta_1} \sum_{t=1}^T \sigma_1^2 = \frac{T \sigma_1^2}{1 - \alpha_1 - \beta_1} \neq 0.$$

- Pristrasnost zavisi od veličine uzorka T, odnosno neće nestati povećavanjem obima uzorka – ocene ONK su **neKonzistentne**.

# Ocenjivanje jednačina redukovane forme

---

- Pri uobičajenim pretpostavkama, koeficijenti redukovane forme **se mogu konzistentno oceniti** metodom ONK.
- Konzistentni metodi ocenjivanja strukturnih jednačina razvijeni su upravo na relaciji koja postoji između redukovane i strukturne forme modela (ocene se dobijaju **indirektno**).
- Na ovaj način nekada dobijamo jednoznačne, a nekad višeznačne ocene parametara u zavisnosti od **identifikovanosti** ocenjivanih jednačina

# Metod indirektnih najmanjih kvadrata (INK)

---

- Jednoznačne ocene parametara strukturne forme mogu se dobiti iz ocenjenih koeficijenata redukovane forme ako je jednačina **tačno identifikovana (metod indirektnih najmanjih kvadrata, INK)**.
- Dodatno, mora biti ispunjen i uslov ranga, kao i pretposlavke o stohastičnosti KLRM u redukovanoj formi modela (videti u nastavku).
- Metod se još naziva i metod redukovane forme.
- Ocene su **pristrasne**, ali **konzistentne** (pristrasnost iščezava sa rastom uzorka).

# Metod INK (nastavak)

---

- Metod INK je prevaziđen u praktičnim istraživanjima iz dva razloga:
  - 1) Većina simultanih jednačina je prekomerno identifikovana.
  - 2) Za sisteme sa većim brojem jednačina ponekad je vrlo zahtevno rešiti i oceniti jednačine redukovane forme.
- Alternativu predstavlja **metod dvostepenih najmanjih kvadrata; 2SNK** (za tačno identifikovane jednačine ocene INK i 2SNK su jednake).



## Metod instrumentalnih promenljivih(IP)

- Koristi se za ocenu parametara strukturnih jednačina.
- Kao **instrumentalne promenljive**, koriste se **egzogene** promenljive **sistema**.
- Polaznu zavisnost (strukturna jednačina) pomnožimo sa svim egzogenim promenljivima u sistemu i sumiramo obe strane jednakosti.
- Na taj način dobijamo sistem jednačina iz koga je u nekim slučajevima moguće dobiti jedinstvene ocene **(pokazati)!**
- Ocene metodom IP su **pristrasne**, ali **konzistentne** (pristrasnost iščezava sa rastom uzorka).



# Uslovi identifikovanosti I

---

- Formalno pravilo za utvrđivanje identifikovanosti pojedinačnih jednačina – **metod instrumentalnih promenljivih, IP.**
- Jedinstvena rešenja/ocene: broj egzogenih promenljivih jednak broju parametara u jednačini (**tačna identifikovanost**).
- Više rešenja: broj egzogenih promenljivih veći od broja parametara u jednačini (**prekomerna identifikovanost**).
- Potreban uslov za identifikaciju: da broj egzogenih promenljivih u sistemu **ne bude manji** od broja parametara u jednačini.
- Jednačina je neidentifikovana, ako se njeni parametri ne mogu oceniti iz podataka uzorka (**broj parametara** u jednačini je **veći** od broja egzogenih promenljivih u sistemu).

# Uslovi identifikovanosti II

---

- Navedeni uslov je ekvivalentan tzv. **uslovu reda (potreban uslov)**: **Broj** promeljivih **isključenih** iz posmatrane jednačine **nije manji** od broja endogenih promenljivih (broja jednačina) umanjenih za jedan.
- Navedeni uslov se još definiše i kao: Broj apriornih ograničenja (R) ne sme biti manji od broj endogenih promenljivih u sistemu (broj jednačina) umanjenih za jedan (M-1)
- Razlikujemo tri situacije:
  - 1)  $R < M-1$  – jednčina je nedovoljno identifikovana
  - 2)  $R = M-1$  - jednačina je tačno identifikovana.
  - 3)  $R > M-1$  – jednčina je prekomerno identifikovana.
- **Uslov ranga (potreban i dovoljan uslov** identifikovanosti): Svaka od jednačina sistema sadži jedinstvenu statističku formu i ne može se dobiti kao rezultat transformacije bilo koje druge jednačine, niti linearna kombinacija preostalih jednačina.

# Metod dvostepenih najmanjih kvadrata (2SNK)

---

- Najvažnji metod ocenjivanja u grupi metoda ocenjivanja pojedinačnih jednalina.
- Primenjuje se **i na tačno i na prekomerno identifikovane** jednačine.
- Metod 2SNK daje pristrasne, ali **konzistentne ocene.**
- Endogene promenljive koje su regresori u strukturnim jednačinama, zamenjuju se linearnim funkcijama svih predeterminisanih promenljivih.

## Ocenjivanje u dva stepena

---

- U prvom stepenu ocenjivanja primenjuje se metod ONK na redukovanu formu, da se dobije ocenjena vrednost za endogenu objašnjavajuću promenljivu  $P_t$  ( $\hat{P}_t$ ).
- U drugom stepenu ocenjivanja, po drugi put se primenjuje metod ONK u regresiji zavisne promenljive  $Q_t$  na predeterminisane i ocenjene endogene promenljive (ocenjenu vrednost  $P_t$  iz redukovane forme):

$$Q_t^P = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{P}_t + \varepsilon_t \quad - \text{ponuda}$$

$$Q_t^T = \beta_0 + \beta_1 \hat{P}_t + \beta_2 Y_t + \varepsilon_t' \quad - \text{tražnja}$$

## Metod 2SNK (nastavak)

---

- Endogene promenljive, korelisane sa greškama jednačine, zamenjuju se svojim ocenama iz redukovane forme (predeterminisane prom. u limesu verovatnoće nisu korelisane sa greškama jednačine).
- Reč je **metodu instrumentalnih promeljivih**, u kome se kao instrumenti za endogene prome. koriste njihove ocene iz redukovane forme.
- Ocene iz redukovane forme su **najbolji instrumenti** (u slučaju ispravne specifikacije modela): visoko korelisani sa orig. vrednostima endogenih promenljivih i nekorelisane sa greškom jednačine).
- Metod **2SNK je najčešće u upotrebi!**

## Interes istraživača može biti:

---

- Ocena ispravnosti nekih teorijskih koncepata (ocena parametara strukturne forme).
- Ocene numeričkih parametara radi donošenja odluka (koeficijenti strukturne, redukovane forme, odnosno finalne forme modela - **računanje multiplikatora**).
- uslovno **predviđanje** vrednosti endogenih promenljivih uz date pretpostavke o egzogenim (koristeći **redukovanu/finalnu formu** modela).