

Svojstva ocena parametara

Zorica Mladenović

1

Struktura predavanja

- Uvodne napomene
- Svojstva ocena na malim uzorcima
- Asimptotska svojstva ocena

2

- **Uvodne napomene**

3

Osnove

- Podsećanje:
- **Elementarna statistika**

Kako se ocenjuje srednja vrednost (μ) osnovnog skupa?

- Na osnovu aritmetičke sredine \bar{X} iz izabranog uzorka

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

Kako se ocenjuje varijansa (σ^2) osnovnog skupa?

- Na osnovu ocene $s^2 = \frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$

4

Osnove II

- **Regresiona analiza**

Kako se ocenjuju parametri jednostavnog regresionog modela $Y_i = \beta_0 + \beta X_i + \varepsilon_i$?

○ Na osnovu b_0 i b prema metodu ONK:

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad b_0 = \bar{Y} - b\bar{X}$$

5

Osnove III

- **Ključna pitanja:**

- Kakva su svojstva ocena u navedenim primerima?
- Kakva su svojstva ocena u opštem slučaju?
- Kada možemo smatrati da su ocene kvalitetne, odnosno pouzdane?

- Potrebno je znati šta se podrazumeva pod terminom kvalitetna ocena.

- Uobičajeni termin: ***poželjna svojstva ocena.***

6

Osnove III

- Poželjna svojstva ocena dele se na dve grupe:
 - Svojstva ocena na uzorcima malog obima
 - Svojstva ocena na uzorcima velikog obima (asimptotska svojstva ocena).

7

Pretpostavke

- Posmatramo osnovni skup koga čine vrednosti koje uzima slučajna promenljiva X .
- Vrednosti su određene nekom raspodelom verovatnoće.
- Nepoznati parametar osnovnog skupa koji opisuje raspodelu: θ

8

Pretpostavke II

- Ocena parametra osnovnog skupa $\hat{\theta}$
 - Ocena je funkcija svih n elemenata uzorka.
 - Elementi uzorka: X_1, X_2, \dots, X_n .
 - Ocena je slučajna promenljiva.
 - Ocena poseduje raspodelu verovatnoće. To je uzoračka raspodela verovatnoće ocene.
 - Ali, prema datom skupu podataka uvek se dobija konkretna ocenjena vrednost.

9

- Svojstva ocena na malim uzorcima

10

Poželjna svojstva na malim uzorcima

- Nepriistrasnost
 - Efikasnost
 - Linearnost

11

Nepriistrasnost (centriranost) ocene

- **DEF.** Ocena $\hat{\theta}$ je nepriistrasna ocena parametra θ ako je njena očekivana vrednost jednaka datom parametru.
- U zapisu: $E(\hat{\theta}) = \theta$
- Nepriistrasna ocena je u proseku jednaka parametru.

Ocena varira od uzorka do uzorka. Prosek svih dobijenih vrednosti jednak je stvarnoj vrednosti parametra.

12

Nepriistrasnost ocene II

- Ukoliko dati uslov nije ispunjen ocena je pristrasna.

- Veličina pristrasnosti: $E(\hat{\theta}) - \theta$

- Pristrasnost može:

- pozitivna
- negativna

- Pozitivna pristrasnost (pristrasnost na više):

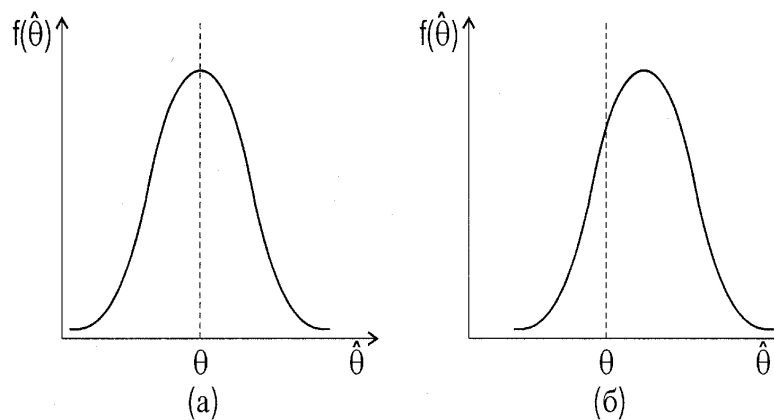
$$E(\hat{\theta}) - \theta > 0$$

- Negativna pristrasnost (pristrasnost na niže):

$$E(\hat{\theta}) - \theta < 0$$

13

Nepriistrasnost ocene: grafički prikaz funkcija gustina nepristrasne i pristrasne ocene



14

Nepriistrasnost ocene: varijansa ocene

- Varijansa ocene: meri stepen raspršenosti ocene od korespondirajuće srednje vrednosti ocene

$$v(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - E(\hat{\theta}))^2$$

- Ukoliko je ocena nepriistrasna tada je varijansa:

$$v(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - \theta)^2$$

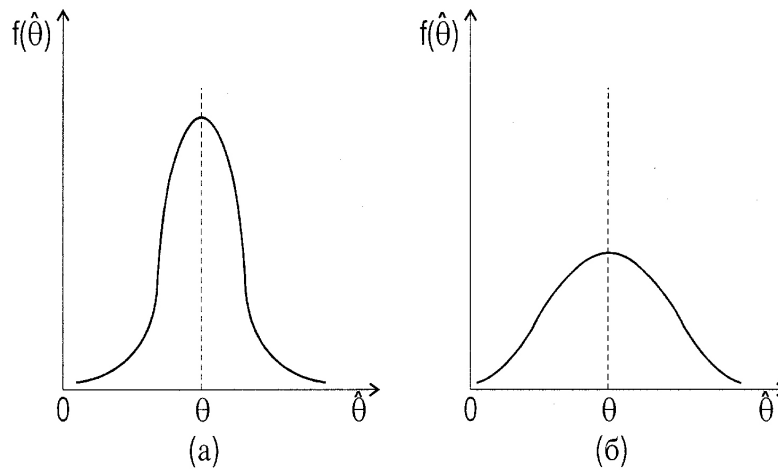
15

Efikasnost ocene

- **DEF.** Ocena $\hat{\theta}$ je efikasna ocena parametra θ ako su zadovoljena sledeća dva uslova:
 1. *Ocena je nepriistrasna*
 2. *Ne postoji druga nepriistrasna ocena sa manjom varijansom*
- To je ocena sa najmanjom varijansom u klasi svih nepriistrasnih ocena.
- Alternativni termin: najbolja nepriistrasna ocena.
- Termin najbolja ocena odnosi se na ocenu sa najmanjom varijansom.

16

Efikasnost ocene: grafički prikaz funkcija gustina relativno efikasne i neefikasne ocene



Linearnost ocene

- **DEF.** Ocena $\hat{\theta}$ je linearna ocena parametra ako se dobija kao linearna funkcija elemenata iz uzorka X_1, X_2, \dots, X_n
- Ocene ovog tipa su jednostavnije za analizu od ocena koje su nelinearne funkcije članova uzorka.

Sumiranje sva tri svojstva

- **DEF.** Ocena $\hat{\theta}$ je *najbolja linearna nepristrasna* ocena parametra θ ako zadovoljava sledeća tri uslova:
 1. Ocena je nepristrasna
 2. Ocena ima najmanju varijansu
 3. Ocena je linearna.
- Skraćenica: NLNO (engl. BLUE)

19

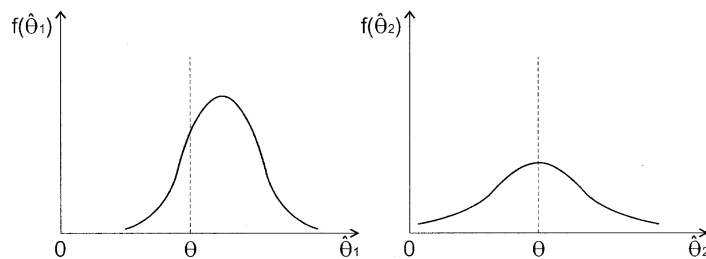
Srednja kvadratna greška ocene

- Nisu sve ocene *najbolje linearne nepristrasne* ocene.
- Na primer:
 1. Ocena je pristrasna ili
 2. Ocena nema najmanju varijansu
- Kako izabrati bolju ocenu u skupu ocena koje ne poseduju sva poželjna svojstva?

20

Srednja kvadratna greška ocene: ilustracija

- Ocena $\hat{\theta}_1$: pristrasna, Ocena $\hat{\theta}_2$: nepristrasna
- Varijansa prve ocene je manja od varijanse druge ocene
- Koju od dve ocene odabrati? Pristrasnu sa manjom varijansom ili nepristrasnu sa relativno velikom varijansom.



21

Srednja kvadratna greška ocene (SKG)

- To je pokazatelj za odabir najpouzdanije ocene u klasi ocena koje nisu NLNO.
- Definiše se prema:

$$SKG(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - \theta)^2 = v(\hat{\theta}) + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2$$

- Predstavlja zbir varijanse ocene i kvadrata pristrasnosti ocene.
- Manja vrednost sugerise konačan izbor.
- Izbegava se izbor visoko pristrasne ocene ili ocene sa visokom varijansom.

22

- **Asimptotska svojstva ocena**

23

Polazni termini

- Asimptotska raspodela
- Granična vrednost

24

Poželjna asimptotska svojstva ocena

- Asimptotska nepristrasnost
- Konzistentnost
- Asimptotska efikasnost

25

Asimptotska (granična) raspodela

- **DEF.** Asimptotska raspodela verovatnoće ocene jeste raspodela čija svojstva poprima ocena kada se povećava obim uzorka i teži beskonačnosti ($n \rightarrow \infty$)
- *Primer:*
 - Imamo osnovni skup sa parametrima μ i σ^2 .
 - Prema uzorku obima n ocenjujemo μ na osnovu \bar{X}
 - Nije nam poznata uzoračka raspodela
 - Ali, uz uslov $n \rightarrow \infty$ raspodela se aproksimira normalnom raspodelom.
 - Dakle, asimptotska raspodela \bar{X} je normalna.

26

Asimptotska (granična) raspodela II

- Kakav je odnos između uzoračke raspodele verovatnoće ocene i asimptotske raspodele verovatnoće ocene?
- U osnovi razlikujemo tri situacije.

27

Uzoračka i asimptotska raspodela ocene

1. Uzoračka raspodela ocene je poznata i identična za sve moguće obime uzorka.
 - *Primer:*
 - Imamo normalno raspodeljen osnovni skup sa parametrima μ i σ^2 .
 - Ocena \bar{X} srednje vrednosti μ poseduje istovetnu uzoračku i asimptotsku raspodelu, koja je normalna:

$$\bar{X} : N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

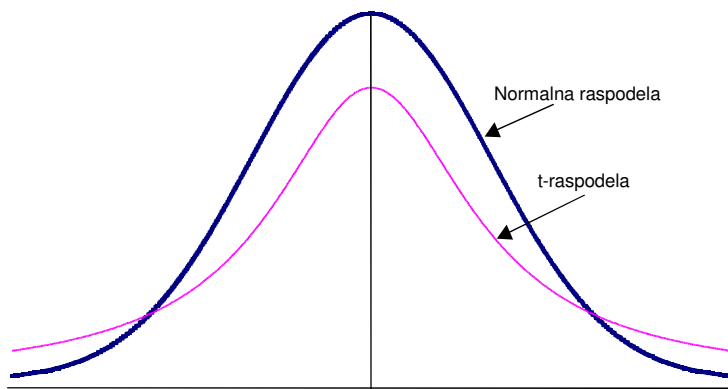
28

Uzoračka i asimptotska raspodela ocene II

2. Ocena poseduje jedan tip raspodele na uzorcima konačnog obima, da bi sa povećanjem obima uzorka ocena poprimila svojstva druge raspodele.
 - *Primer:*
 - Slučajna promenljiva sa t-raspodelom na uzorcima većim od 30 dobija svojstva normalne standardizovane slučajne promenljive.

29

Funkcije gustine normalne standardizovane i t-raspodele



30

Normalna standardizovana i t-raspodela: podsećanje

- Obe raspodele su simetrične u nuli sa oblikom zvona.
- Varijansa standardizovane slučajne promenljive (pa i normalne) je 1.
- Varijansa slučajne promenljive sa t -raspodelom je $n/(n-2)$, što je uvek veće od 1.
- Slučajna promenljiva sa t -raspodelom poseduje veći stepen raspršenosti od normalne standardizovane slučajne promenljive.
- Sa povećanjem obima uzorka količnik $n/(n-2)$ postaje blizak vrednosti jedan, tako da se i t -raspodela može aproksimirati normalnom raspodelom.

31

Uzoračka i asimptotska raspodela ocene III

3. Uzoračka raspodela ocene nije poznata. Međutim, asimptotska raspodela ocene je precizno definisana i može se odrediti.
 - *Primer sa početka:*
 - Imamo osnovni skup sa parametrima μ i σ^2 .
 - Raspodela je nepoznata
 - Prema CGT ocena \bar{X} srednje vrednosti μ poseduje normalnu raspodelu pri uslovu $n \rightarrow \infty$

32

Numerička obeležja asimptotske raspodela ocene

1. Asimptotska očekivana vrednost
 2. Asimptotska varijansa
- Asimptotska očekivana vrednost:
Očekivana vrednost ocene pri uslovu $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{\theta})$$

- Asimptotska varijansa

$$\frac{1}{n} \lim_{n \rightarrow \infty} \text{var}(\hat{\theta})$$

33

Granična vrednost

- *Primer:*
- Osnovni skup sa parametrima μ i σ^2 .
- Prema uzorku obima n ocenjujemo μ na osnovu \bar{X}
- Za $n \rightarrow \infty$ raspodela \bar{X} se aproksimira normalnom raspodelom:

$$\bar{X} : N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

- Dodatno,

$$\frac{\sigma^2}{n} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

34

Granična vrednost II

- Sa povećanjem obima uzorka smanjuje se varijansa \bar{X}
- U graničnom slučaju ta varijansa bi bila jednaka nuli.
- Kako varijansu nula može imati samo konstanta, to se raspodela ocene svodi samo na jednu vrednost – vrednost parametra koji se ocenjuje.
- **Kada se raspodela ocene svodi na jednu vrednost sa porastom obima uzorka, tada data ocena konvergira u verovatnoći ka toj vrednosti.**

35

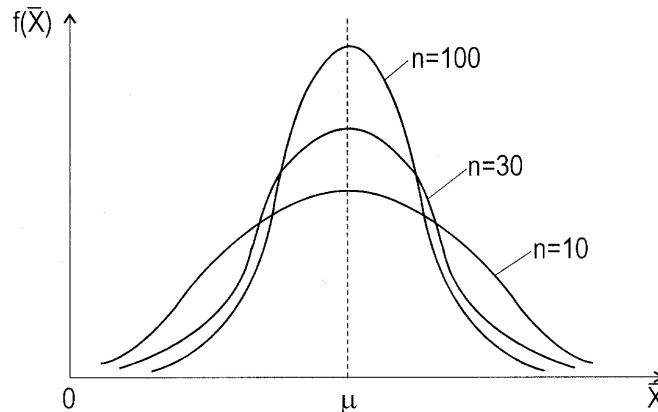
Granična vrednost III

- **DEF.** Vrednost ka kojoj konvergira ocena sa porastom obima uzorka jeste **granična vrednost ocene.**
- Oznaka: $p \lim(\hat{\theta})$
- Granična vrednost ocene \bar{X} je μ :

$$p \lim(\bar{X}) = \lim_{n \rightarrow \infty} E(\bar{X}) = \mu.$$

36

Grafički prikaz raspodele verovatnoće aritmetičke sredine za uzorke različitog obima



37

Asimptotska nepristrasnost ocene

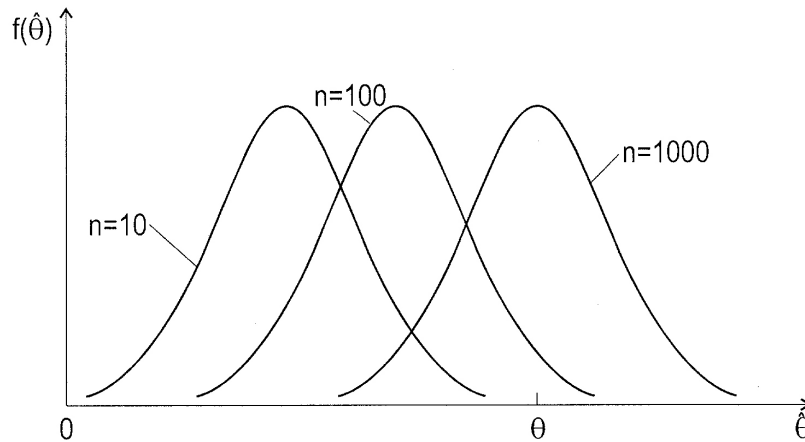
- **DEF.** Ocena $\hat{\theta}$ je asimptotski nepristrasna ocena parametra θ ako važi:

$$E(\hat{\theta}) \rightarrow \theta, n \rightarrow \infty$$

- Ocena postaje nepristrasna sa porastom obima uzorka.
 - Nepristrasna ocena je uvek asimptotski nepristrasna
 - Pristrasna ocena je asimptotski nepristrasna samo ako se sa porastom obima uzorka smanjuje veličina pristrasnosti.
- Varijansa ocene nije bitna za ovo svojstvo

38

Asimptotska nepristrasnost ocene: grafički prikaz funkcije gustine asimptotski nepristrasne ocene



39

Konzistentnost ocene

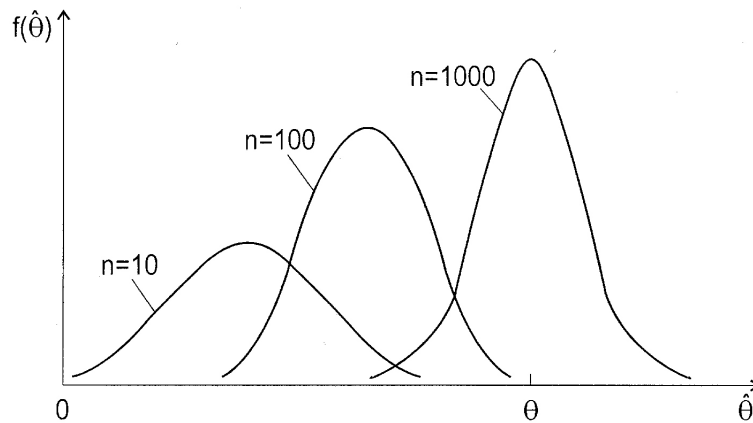
- **DEF.** Ocena $\hat{\theta}$ je konzistentna ocena parametra θ ako važi:

$$p \lim(\hat{\theta}) = \theta$$

- Dodatna objašnjenja:
- Konzistentna ocena konvergira u verovatnoći ka stvarnoj vrednosti parametra uz uslov $n \rightarrow \infty$
- Granična vrednost raspodele verovatnoće konzistentne ocene jednaka je parametru koji se ocenjuje.

40

Konzistentna ocena: grafički prikaz funkcija gustina za uzorke različitog obima



41

Uslov za konzistentnost ocene

- Dovoljan uslov: i varijansa i pristrasnost ocene teži nuli kada obim uzorka teži beskonačnosti
 - Potreban uslov: postoje asimptotska varijansa i srednja vrednost
 - Podsećanje:
 - ✦ SKG ocene = varijansa ocene + kvadrat pristrasnosti
 - Dakle, SKG ocene teži nuli kako obim uzorka teži beskonačnosti

42

Nekonzistentnost ocene

- **DEF.** Ocena $\hat{\theta}$ nije konzistentna ocena parametra θ ako važi:

$$p \lim(\hat{\theta}) \neq \theta$$

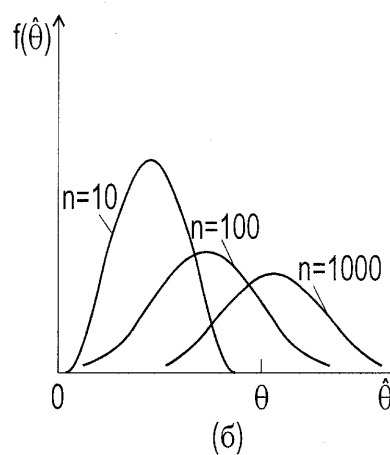
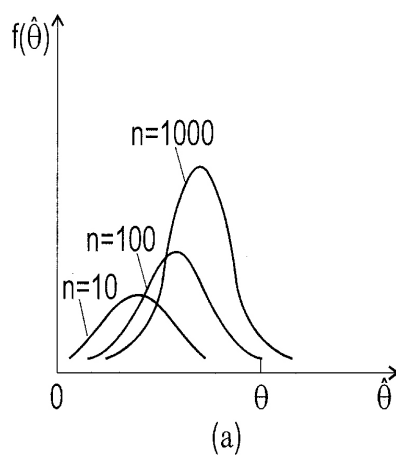
- Ovo se dešava onda kada sa porastom obima uzorka bar jedan od dva sabirka kod SKG ne teži ka nuli.
- Najčešće imamo da se:
 - smanjuje varijansa, ali se ne eliminiše pristrasnost
 - smanjuje pristrasnost, ali ne i varijansa.

43

Funkcije gustina nekonzistentnih ocena:

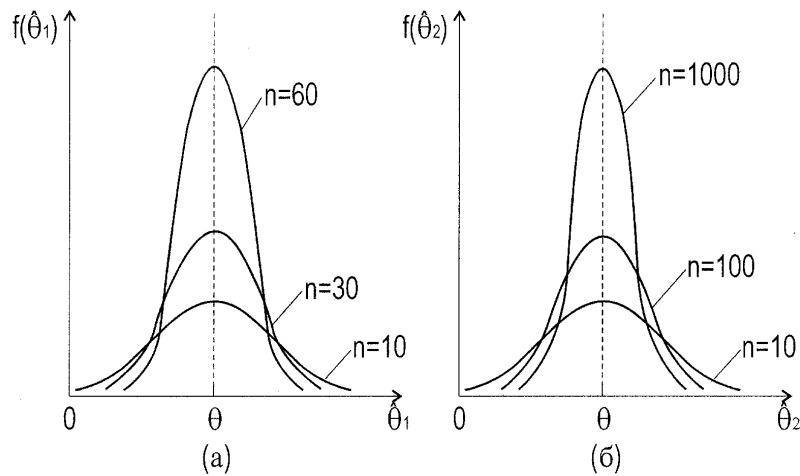
a) smanjuje se varijansa, ali ne i pristrasnost

b) smanjuje se pristrasnost, ali ne i varijansa



44

Asimptotska efikasnost: funkcije gustine dve konzistentne ocene, čije varijanse se razlikuju sa porastom obima uzorka



45

Asimptotska efikasnost ocene

- **DEF.** Ocena $\hat{\theta}$ je asimptotski efikasna ocena parametra θ ako su ispunjeni sledeći uslovi:
 1. Ocena $\hat{\theta}$ je konzistentna
 2. Ne postoji druga konzistentna ocena sa manjom asimptotskom varijansom

46

Asimptotska efikasnost ocene II

- Relativni odnos asimptotskih varijansi
- U klasi konzistentnih ocena najmanju asimptotsku varijansu poseduje ona ocena koja svojstvo konzistentnosti postiže za najmanji obim uzorka.
- To je ocena koja po najbržoj stopi konvergira ka vrednosti parametra

47

Primer

- Osnovni skup karakterišu parametri μ i σ^2
- Iz uzorka obima n srednja vrednost μ se ocenjuje na bazi sledećih ocena:

$$\mu_1 = \bar{X} + 10, \mu_2 = \bar{X} + \frac{5}{n}$$

\bar{X} – aritmetick a sredina

- *Da li su date ocene nepristrasne?*
- *Odrediti varijansu svake od ocena.*
- *Odrediti SKG svake od ocena za $\sigma^2=4$ i $n=25$.*
- *Da li su date ocene asimptotski nepristrasne?*
- *Da li su date ocene konzistentne?*

48