Jednostavna regresiona analiza

Zorica Mladenović

1

Struktura predavanja

- Polazna ideja i primer
- Populaciona i uzoračka regresiona prava
- Metod običnih najmanjih kvadrata
- Korelacija
- Jednostavne nelinearne zavisnosti

2

- **Polazna ideja**

3

Osnove

- Regresiona analiza predstavlja osnovni metodološki okvir ekonometrijskog modeliranja.
- Pretpostavimo da raspolažemo godišnjim podacima o potrošnji i dohotku *per capita* jedne zemlje u periodu od 15 godina.
  - Zadatak: otkriti prirodu njihove međusobne povezanosti.
- Cilj regresione analize jeste utvrđivanje prirode i forme povezanosti između promenljivih.

4

Oznake

- Razlikujemo dva tipa promenljivih:
  - Zavisna promenljiva: Y
  - Nezavisne promenljive: $X_1, X_2, \ldots, X_k$ (ukupno k).
- Alternativni nazivi za Y i X:

Y	X
zavisna promenljiva	nezavisna promenljiva
regresant	regresor
	objašnjavajuća promenljiva
	eksplanatorna promenljiva

- U ovom trenutku fokusiramo se na situaciju kada postoji samo jedna objašnjavajuća promenljiva – **jednostavna regresiona analiza.**

5

Razlika između regresione i korelacione analize

- Ako kažemo da su Y i X korelisane promenljive, to znači da ih tretiramo na simetričan način. Ne insistiramo na pravcu uzročnosti.
- U regresionoj analizi zavisna (Y) i nezavisna (X) promenljiva imaju potpuno različitu poziciju.
  - Promenljiva Y je stohastičkog tipa, što znači da je slučajna promenljiva koju karakteriše određena raspodela.
  - Promenljiva X uzima fiksirane vrednosti iz ponovljenih uzoraka. Ona nije stohastičke prirode.
  - **Postoji jednosmeran pravac uzročnosti: samo X utiče na Y, dok Y ne utiče na X.**

6

Primeri jednostavnih regresija

- Da li je inflacija isključivo određena deprecijacijom deviznog kursa?
- Da li nivo izvoza zavisi od nivoa industrijske proizvodnje?
- U kojoj meri je tražnja za datim proizvodom određena njegovom cenom?
- Da li je stopa rasta BDP-a determinisana ostvarenim nivoom demokratije?

7

Primena jednostavne regresije

- Posmatramo godišnje podatke o potrošnji i dohotku *per capita* za 15 godina

godina	1	2	3	4	5	6	7
Potrošnja	42	44	46	47	50	51	50
Dohodak	50	54	56	60	58	60	62

godina	8	9	10	11	12	13	14	15
Potrošnja	52	54	56	54	58	60	62	60
Dohodak	64	66	68	70	72	74	75	80

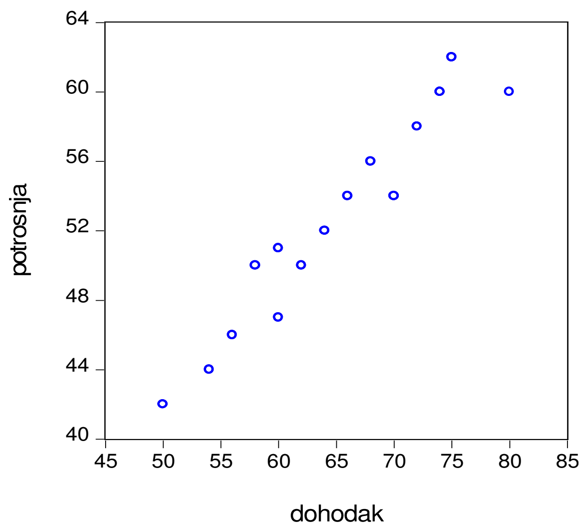
8

Primena jednostavne regresije (II)

- Pretpostavljamo da je veza između potrošnje i dohotka pozitivna. Hoćemo da opišemo potrošnju kao funkciju od dohotka:
  - Potrošnja: zavisna promenljiva (Y)
  - Dohodak: nezavisna promenljiva (X)
- Prvi korak: grafički prikaz parova podataka (X_i, Y_i), $i=1,2,\ldots,15$.
- Parovi: (50, 42),..., (80, 60).

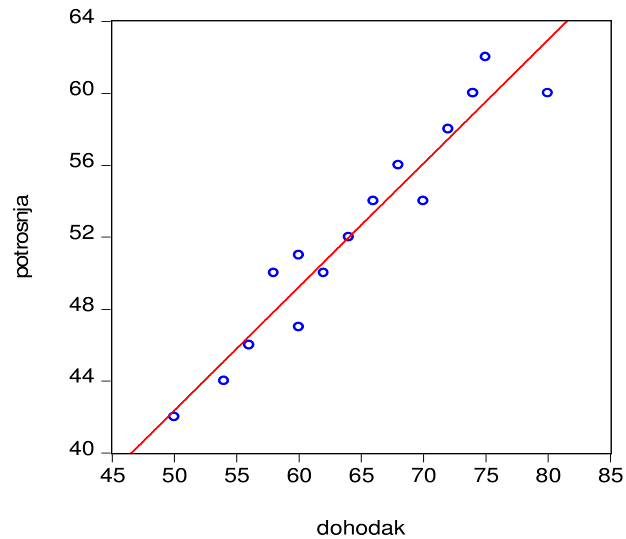
9

Grafički prikaz: dijagram rasturanja (raspršenosti) tačaka



10

Dijagram rasturanja tačaka sa pravom linijom



11

Postavljanje prave

- Namera nam je da postavimo pravu tako da najbolje aproksimira skup podataka.
- Postaviti pravu znači odrediti njene parametre:
$$Y=b_0+bX$$
- Jednačina $Y=b_0+bX$ je deterministička: za dati nivo dohotka uvek znamo nivo potrošnje.
- Da li je to realno? Ne. Zato je potrebno uključiti slučajan član ε u analizu.

12

Zašto uključujemo slučajan član?

- Postoje faktori čiji su pojedinačni uticaji na kretanje izabrane zavisne promenljive sporadični i neregularni. Slučajna greška sadrži njihovo zbirno dejstvo.
- Slučajna greška je potrebna i zbog nepredvidivosti ljudskog ponašanja.
- Slučajna greška može izraziti i grešku u merenju promenljivih (zaokruživanje i sl.).

13

- **Populaciona i uzoračka regresiona prava (jednačina)**

14

Osnovni skup (populacija) i uzorak /podsećanje

- **Osnovni skup** je skup svih jedinica posmatranja.
- **Uzorak je podskup osnovnog skupa**.
  - Uzorak je slučajan ako svaka jedinica osnovnog skupa ima jednaku verovatnoću da bude izvučena kao element uzorka.
  - To što je neka od jedinica osnovnog skupa postala deo uzorka ne menja verovatnoću da druga jedinica bude izvučena kao element uzorka.
- Definicija uzorka: skup nezavisnih i jednako raspodeljenih slučajnih promenljivih.

15

Populaciona i uzoračka regresiona prava (jednačina)

- *Populaciona regresiona prava* označava stvarnu stohastičku vezu između datih promenljivih (sadrži parametre β_0 i β):

$$E(Y) = \beta_0 + \beta X$$
$$Y = E(Y) + \varepsilon$$
$$Y = \beta_0 + \beta X + \varepsilon$$

16

Populaciona i uzoračka regresiona prava (jednačina) (II)

- Uzimajući u obzir notaciju elemenata uzorka populaciona regresiona prava postaje:

$$E(Y_i) = \beta_0 + \beta X_i$$
$$Y_i = E(Y_i) + \varepsilon_i$$
$$Y_i = \beta_0 + \beta X_i + \varepsilon_i$$

- *Uzoračka regresiona prava* opisuje vezu prema datom uzorku:

$$\hat{Y}_i = b_0 + bX_i,\ i = 1,2,\ldots,n$$
$$\hat{Y}_i - ocenjena\,vrednost$$
$$b_0 - \text{ocena parametra } \beta_0$$
$$b - \text{ocena parametra } \beta$$

17

Populaciona i uzoračka regresiona prava (jednačina) (III)

- Stvarni nivo zavisne promenljive je zbir ocenjenog nivoa i onoga što model nije ocenio.
- Razlika između stvarnog i ocenjenog nivoa zavisne promenljive naziva se ***rezidual*** (oznaka e_i):

$$Y_i = \hat{Y}_i + e_i,\ i = 1,2,\ldots,n.$$

- Uzoračka regresiona prava (jednačina) se koristi za donošenje zaključaka o parametrima populacione regresione jednačine.

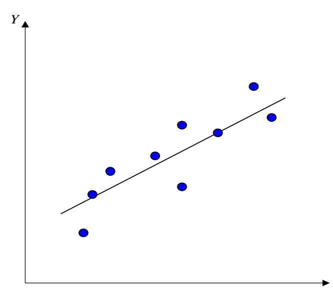
18

- **Metod običnih najmanjih kvadrata (Metod ONK)**

19

Određivanje pozicije prave (regresionih koeficijenata)

- Kako određujemo vrednosti b_0 i b ?
- Kriterijum: biramo b_0 i b tako da je prava najmanje moguće udaljena od tačaka dijagrama rasturanja
- *Drugim rečima: da je odstupanje prave od tačaka minimalno*



20

Metod običnih najmanjih kvadrata

- Najčešće korišćen metod postavljanja prave i izbora regresionih koeficijenata jeste metod običnih najmanjih kvadrata (ONK).
- Ideja metoda: minimizirati zbir kvadrata odstupanja podataka od prave.
- Oznake:

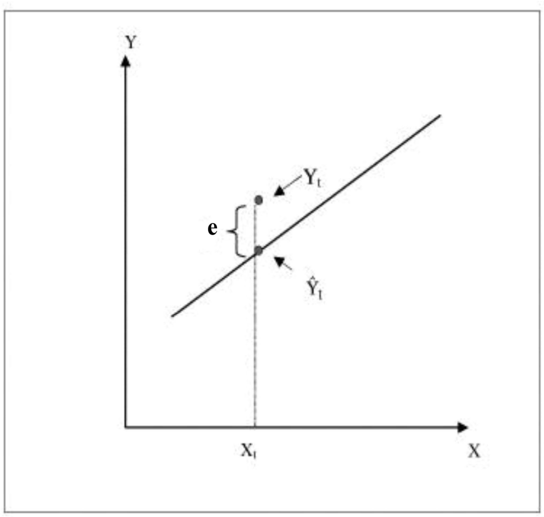
Y_i -stvarna vrednost u trenutku i

$\hat{Y}_i$ -vrednost Y_i koja je ocenjena regresionom pravom

e_i -razlika stvarne i ocenjene vrednosti, rezidual, Y_i - $\hat{Y}_i$

21

Stvarna i ocenjena vrednost zavisne promenljive



22

Izvođenje ONK ocena

- Potrebno je minimizirati zbir (tzv. rezidualnu sumu kvadrata):

$$e_1^2 + e_2^2 + ... + e_n^2 = \sum_{i=1}^{n} e_i^2$$

- Šta je e_i ? To je razlika $e_i = Y_i - \hat{Y}_i$
- Naći minimum $\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{Y}_i)^2$ je ekvivalentno određivanju minimuma $\sum_{i=1}^{n} e_i^2$

23

Izvođenje ocena metoda ONK (II)

- Kako je $\hat{Y}_i = b_0 + bX_i$, možemo definisati funkciju

$$S(b_0, b) = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - b_0 - bX_i)^2$$

- Potrebno je minimizirati funkciju S u odnosu na b_0 i b:

$$\frac{\partial S(b_0, b)}{\partial b_0} = -2\sum_{i=1}^{n} (Y_i - b_0 - bX_i) = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial S(b_0, b)}{\partial b} = -2\sum_{i=1}^{n} X_i(Y_i - b_0 - bX_i) = 0 \qquad (2)$$

- Iz (1):

$$\sum_{i=1}^{n} (Y_i - b_0 - bX_i) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} Y_i - nb_0 - b\sum_{i=1}^{n} X_i = 0.$$

24

Izvođenje ONK ocena (III)

- Možemo pisati (3): $\sum_{i=1}^{n} Y_i - nb_0 - b\sum_{i=1}^{n} X_i = 0 / : n$

  $\Rightarrow \overline{Y} - b_0 - b\overline{X} = 0$

- Iz (3): $b_0 = \overline{Y} - b\overline{X}$ (4)

- Iz (2): $\sum_{i=1}^{n} X_i (Y_i - b_0 - bX_i) = 0$ (5)

- Zamenjujemo u (5) izraz za b_0 iz (4) :

$$\sum_{i=1}^{n} X_i (Y_i - (\overline{Y} - b\overline{X}) - bX_i) = 0$$

25

Izvođenje ONK ocena (IV)

- Rešavanjem po b dobijamo:

$$b\left(n\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i \right)^2 \right) = n\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

- Dakle, ocene su:

$$b = \frac{n\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \sum_{i=1}^{n} X_i \sum_{i=1}^{n} Y_i}{n\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i \right)^2} \quad i \; b_0 = \overline{Y} - b\overline{X}$$

- Ocena b se može dobiti i na nešto drugačiji način:

26

Izvođenje ONK ocena: pomoćni rezultati

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})(Y_i-\overline{Y})=\sum_{i=1}^{n}X_iY_i-\sum_{i=1}^{n}X_i\overline{Y}-\sum_{i=1}^{n}Y_i\overline{X}+n\overline{X}\overline{Y}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}X_iY_i-\left(n\overline{X}\right)\overline{Y}-\left(n\overline{Y}\right)\overline{X}+n\overline{X}\overline{Y}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}X_iY_i-n\overline{X}\overline{Y}.$$

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2.$$

27

Izvođenje ONK ocena (VI)

$$b=\frac{n\sum_{i=1}^{n}X_iY_i-\sum_{i=1}^{n}X_i\sum_{i=1}^{n}Y_i}{n\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2}=\frac{\left[n\sum_{i=1}^{n}X_iY_i-\sum_{i=1}^{n}X_i\sum_{i=1}^{n}Y_i\right]\cdot\frac{1}{n}}{\left[n\sum_{i=1}^{n}X_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2\right]\cdot\frac{1}{n}}$$

$$b=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_iY_i-n\overline{X}\overline{Y}}{\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})(Y_i-\overline{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$$

$$b=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$$

$$x_i=X_i-\overline{X},\ y_i=Y_i-\overline{Y}\rightarrow \text{centrirani podaci}$$

28

Izvođenje ONK ocena (VII)

- Drugi parcijalni izvodi su uvek pozitivni:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial b_0^2} = 2n, \frac{\partial^2 S}{\partial b^2} = 2\sum_{i=1}^{n} X_i^2, \frac{\partial^2 S}{\partial b_0 \partial b} = 2\sum_{i=1}^{n} X_i$$

29

Kakva je interpretacija b_0 i b?

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}, \; b_0 = \overline{Y} - b\overline{X}$$

Ocena nagiba b:

Prirast zavisne promenljive po jedinici prirasta nezavisne.

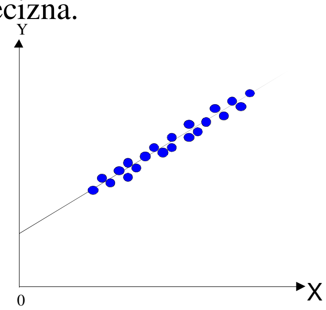
Ocena slobodnog člana b_0:

Nivo zavisne promenljive kada je nivo objašnjavajuće nula.

30

Preciznost ocene slobodnog člana

- Ocena slobodnog člana predstavlja očekivanu vrednost *Y* kada je *X* jednako nuli.
- Treba biti pažljiv prilikom njene interpretacije posebno kada nema dovoljno podataka koji su blizu y-ose.
- Ukoliko je takvih podataka malo onda je ova ocena neprecizna.



31

Kakva je interpretacija b_0 i b u konkretnom primeru?

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{15} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{15} x_i^2} = \frac{702.4}{1023.6} = 0.6862$$

$$b_0 = \overline{Y} - b\overline{X} = 52.4 - 0.6862 \cdot 64.6 = 8.0715$$

$$\hat{Y}_i = 8.0715 + 0.6862\, X_i$$

- Ako se dohodak poveća za jednu jedinicu očekivani rast potrošnje je 0.6862 jedinica. To je marginalna sklonost ka potrošnji.
- Nivo potrošnje pri nultom dohotku je 8.07 jedinica.

32

Tri posledice metoda ONK:

- Zbir reziduala je uvek nula:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \underbrace{(b_0 + bX_i)}_{\hat{Y}_i}\right) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} e_i = 0$$

- Zbir proizvoda reziduala i objašnjavajuće promenljive je uvek nula:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i(Y_i - b_0 - bX_i) \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} X_i e_i = 0$$

- Aritmetičke sredine stvarnih i modelom ocenjenih podataka su iste:

$$\sum_{i=1}^{n} e_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{i=1}^{n} \hat{Y}_i \Big/ \cdot \frac{1}{n}$$

33

<u>Korelacija</u>

Pokazatelj kvaliteta regresije: koeficijent determinacije R^2

- Koji deo varijacija zavisne promenljive je objašnjen modelom, odnosno varijacijama nezavisne promenljive?
- Pokazatelj za odgovor: koeficijent determinacije R^2.
- Ukupni varijabilitet zavisne promenljive:

$$Ukupni\ \ var\,ijabilitet\ = USK = \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \bar{Y}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

- Ukupni varijabilitet zavisne promenljive je zbir dve komponente.

Pokazatelj kvaliteta regresije: koeficijent determinacije R^2(II)

- Ukupni varijabilitet zavisne promenljive je zbir sledeće dve komponente:

1. Varijabilitet zavisne promenljive koji je objašnjen modelom:

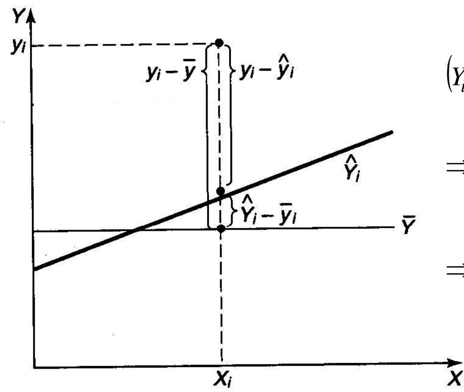
$$Objašnjeni\ \ var\,ijabilitet = OSK = \sum_{i=1}^{n}\left(\hat{Y}_i - \bar{Y}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \hat{y}_i^2$$

2. Varijabilitet zavisne promenljive koji nije objašnjen modelom:

$$Neobjašnjeni\ \ var\,ijabilitet\ = Re\,zidua\ln a\ suma\ kvadrata:$$

$$RSK = \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} e_i^2$$

Koeficijent determinacije R^2 (III)



$$(Y_i - \bar{Y}) = (\hat{Y}_i - \bar{Y}) + \underbrace{(Y_i - \hat{Y})}_{e_i}$$

$$\Rightarrow \sum_i (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum_i (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 + \sum_i e_i^2 + 2\underbrace{\sum_i (\hat{Y}_i - \bar{Y}) e_i}_{0}$$

$$\Rightarrow \sum_i y_i^2 = \sum_i \hat{y}_i^2 + \sum_i e_i^2$$

Koeficijent determinacije R^2 (IV)

- Dakle, $USK \;=\; OSK \;+\; RSK$

$$\sum_i y_i^2 = \sum_i \hat{y}_i^2 + \sum_i e_i^2$$

- Koeficijent determinacije predstavlja udeo objašnjenog u ukupnom varijabilitetu:

$$R^2 = \frac{Objasnjeni\ \ var\,ijabilitet}{Ukupni\ \ var\,ijabilitet} = \frac{OSK}{USK} = \frac{\sum_i \hat{y}_i^2}{\sum_i y_i^2}$$

- Kako je: OSK = USK - RSK, imamo:

$$R^2 = \frac{OSK}{USK} = 1 - \frac{RSK}{USK} = 1 - \frac{\sum_i e_i^2}{\sum_i y_i^2}$$

Koeficijent determinacije R^2 (V)

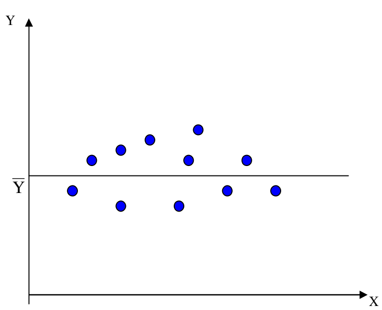
- R^2 se uvek nalazi u intervalu od 0 do 1.
- Ekstremne situacije:
  - *Rezidualna suma kvadrata (neobjašnjeni varijabilitet zavisne promenljive)=Ukupni varijabilitet zavisne promenljive*

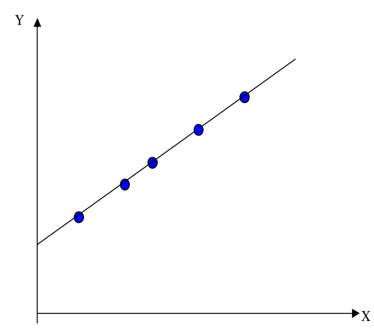
$$RSK = USK, \quad OSK = 0, \quad R^2 = OSK/USK = 0$$

  - *Objašnjeni varijabilitet zavisne promenljive=Ukupni varijabilitet zavisne promenljive*

$$OSK = USK, \quad RSK = 0, \quad R^2 = OSK/USK = 1$$

Ekstremni slučajevi: $R^2 = 0$ i $R^2 = 1$





Kako izračunati rezidualnu sumu kvadrata na osnovu ocena parametara modela?

$$\sum_i e_i^2 = \sum_i \left(Y_i - \overline{Y}\right)^2 - \sum_i \left(\hat{Y}_i - \overline{Y}\right)^2$$

$$= \sum_i \left(Y_i - \overline{Y}\right)^2 - \sum_i \left(\left(b_0 + bX_i\right) - \left(b_0 + b\overline{X}\right)\right)^2$$

$$= \sum_i \left(Y_i - \overline{Y}\right)^2 - b^2 \sum_i \left(X_i - \overline{X}\right)^2$$

$$= \sum_i y_i^2 - b^2 \sum_i x_i^2$$

Kako izračunati rezidualnu sumu kvadrata na osnovu ocena pametara modela? (II)

$$\sum_i e_i^2 = \sum_i y_i^2 - b^2 \sum_i x_i^2$$

$$= \sum_i y_i^2 - b \frac{\sum_i x_i y_i}{\sum_i x_i^2} \sum_i x_i^2$$

$$= \sum_i y_i^2 - b \sum_i x_i y_i$$

Rezime – objašnjeni varijabilitet zavisne promenljive

$$\underbrace{\sum_i \left(\hat{Y}_i - \overline{Y}\right)^2}_{\sum_i \hat{y}_i^2} = b^2 \underbrace{\sum_i \left(X_i - \overline{X}\right)^2}_{\sum_i x_i^2} = b \underbrace{\sum_i \left(X_i - \overline{X}\right)\left(Y_i - \overline{Y}\right)}_{\sum_i x_i y_i}$$

Alternativna formula za koeficijent determinacije i primer

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_i e_i^2}{\sum_i y_i^2} = \frac{b^2 \sum_i x_i^2}{\sum_i y_i^2} = \frac{b \sum_i x_i y_i}{\sum_i y_i^2}$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{15} x_i y_i}{\sum_{i=1}^{15} x_i^2} = \frac{702.4}{1023.6} = 0.6862, \quad \hat{Y}_i = 8.0715 + 0.6862 X_i$$

$$\sum_i e_i^2 = \sum_i y_i^2 - b^2 \sum_i x_i^2 = 519.6 - (0.6862)^2 \cdot 1023.6 = 37.617$$

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_i e_i^2}{\sum_i y_i^2} = 1 - \frac{37.617}{519.6} = 0.93$$

Koeficijent determinacije R^2 i koeficijent korelacije r

- Ocena koeficijenta korelacije izmedju *X i Y:*

$$r = \frac{c\hat{o}v(X,Y)}{\sqrt{\hat{v}(X)\hat{v}(Y)}}$$

$$c\hat{o}v(X,Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)\left(Y_i - \overline{Y}\right)$$

$$\hat{v}(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2, \hat{v}(Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2$$

$$\Rightarrow r = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)\left(Y_i - \overline{Y}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2}}$$

Koeficijent determinacije R^2 i koeficijent korelacije r (II)

$$1.\ r = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)\left(Y_i - \overline{Y}\right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2 \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2}} = \underbrace{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)\left(Y_i - \overline{Y}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}}_{b} \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2}}$$

$$2.\ r^2 = \frac{\overbrace{b^2 \sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}^{OBJASNJENI\ VARIJABILITET}}{\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2}_{UKUPNI\ VARIJABILITET.}} = R^2$$

Koeficijent determinacije R^2 i koeficijent korelacije r (III)

1. Koeficijent korelacije ima isti znak kao ocena nagiba
2. Kvadrat koeficijenta korelacije je koeficijent determinacije

1. Primena jednostavne regresije

•Model vrednovanja kapitala (engl. skraćenica CAPM) predstavlja polazni okvir finansijske analize.

•Modelom se stopa prinosa finansijskog instrumenta j (R_j) opisuje u funkciji od prosečne tržišne stope prinosa (R_m).

•Obe stope se uobičajeno iskazuju u formi odstupanja od odgovarajućeg oportunitetnog troška, koji se meri stopom prinosa nerizičnog finansijskog instrumenta (R_f).

•Ekonometrijski oblik modela je:

$$R_j - R_f = \beta_0 + \beta(R_m - R_f) + \varepsilon$$

1. Primena jednostavne regresije (II)

$$R_j - R_f = \beta_0 + \beta(R_m - R_f) + \varepsilon$$

Parametar nagiba: **beta koeficijent.**

U zavisnosti od toga da li je njegova vrednost veća ili manja od jedan, moguće je proceniti da li je rizik zbog posedovanja datog finansijskog instrumenta veći ili manji od prosečnog tržišnog rizika.

Koeficijent determinacije: **udeo tržišnog rizika u ukupnom riziku posedovanja datih akcija**

- Ukupni varijabilitet zavisne veličine: mera rizika
- Objašnjeni varijabilitet: deo rizika koji je objašnjen tržišnim rizikom
- Neobjašnjeni varijabilitet: deo rizika koji je specifičan

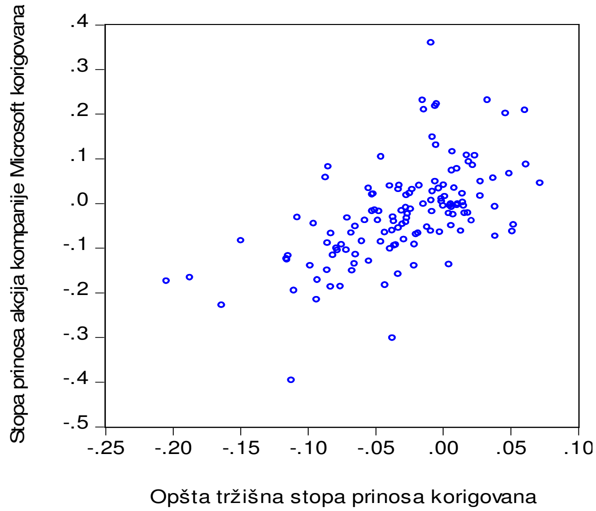
1. Primena jednostavne regresije: rezultat

- Na osnovu mesečnih podataka u periodu: januar 1998- decembar 2008. godina ocenjen je model vrednovanja kapitala za stopu prinosa akcija kompanije *Microsoft*:

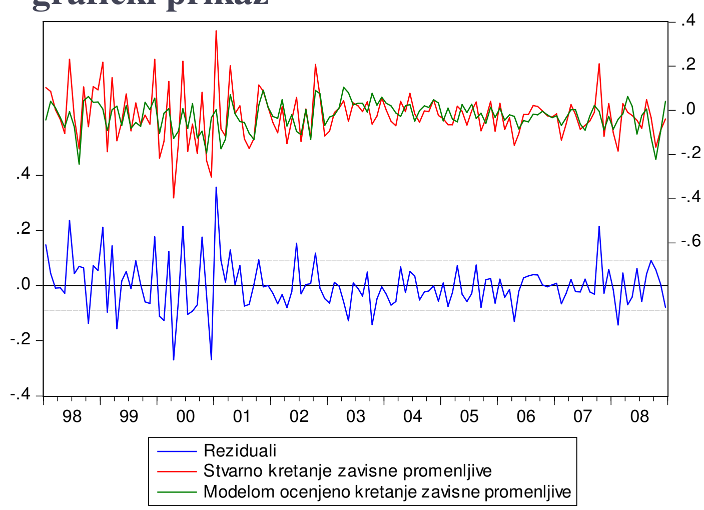
$$R_j - R_f = 0.01 + 1.26(R_m - R_f) + \varepsilon \quad R^2 = 0.33$$

- Da li je rizik posedovanja ovih akcija jednak opštem tržišnom riziku?
- Da li je ocena slobodnog člana očekivana?

1. Primena jednostavne regresije: dijagram rasturanja tačaka



1. Primena jednostavne regresije: grafički prikaz



2. Primena jednostavne regresije

- Dati su podaci panela: godišnji podaci u periodu 2000-2013. godina za sve zemlje sveta
  - BDP per capita
  - Indeksi demokratije:
    - Freedom house (1,2,...,7)
      - Niži indeksi označavaju više sloboda
    - Polity4 (-10,...,10)
      - Viši indeksi označavaju više sloboda
- Oceniti pojedinačne modele zavisnosti BDP per capita (Y_i) od oba indeksa demokratije
- Podaci: tzv. nebalansirani panel, što znači da postoje nedostajuće vrednosti.

53

2. Primena jednostavne regresije: rezultat

$$\hat{Y}_i = 7.67 + 0.62 Polity4\_indeks, R^2 = 0.07$$

14 godina i 146 zemalja, 1952 podatka

$$\hat{Y}_i = 23.70 - 4.05 Freedomhouse\_indeks, R^2 = 0.20$$

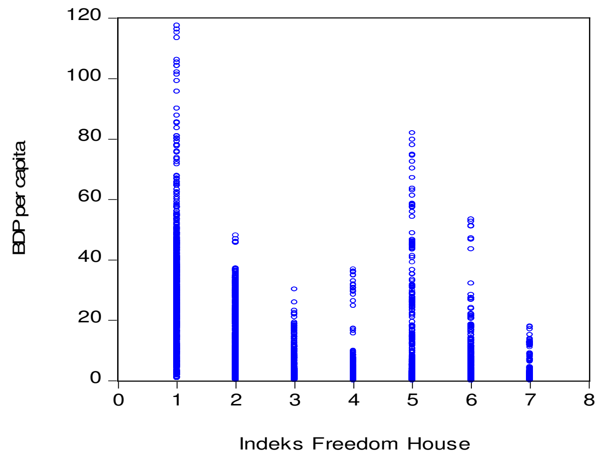
14 godina i 174 zemlje, 2373 podatka

Dobijene ocene nemaju tradicionalnu interpretaciju.

Koeficijent determinacije je od veceg interesa.

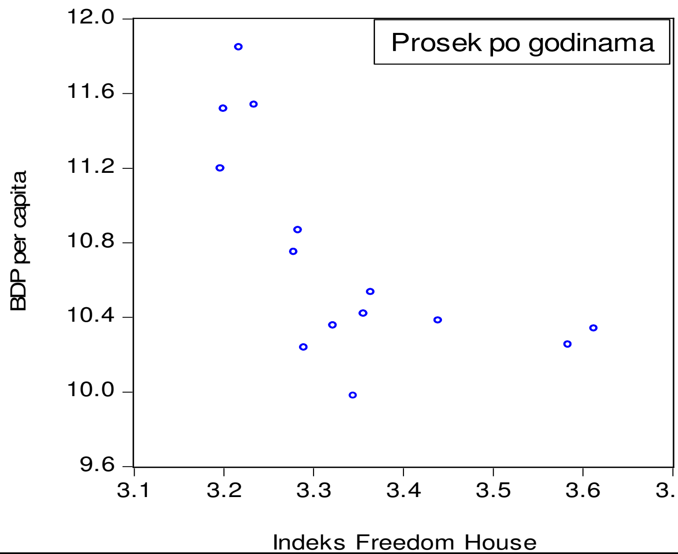
54

2. Primena jednostavne regresije: dijagram rasturanja tačaka



55

2. Primena jednostavne regresije: dijagram rasturanja tačaka u drugoj varijanti



56

3. Primena jednostavne regresije

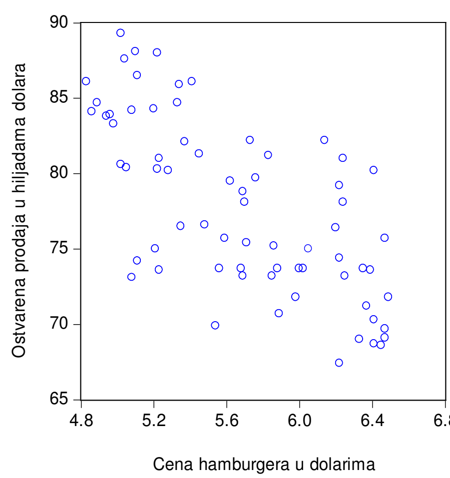
- Raspolažemo podacima preseka: za dati mesec iz 70 prodavnica brze hrane (prilagodjeno iz Hill, Griffiths and Lim, 2008):
  - Ostvarena prodaja hamburgera (u hiljadama dolara),
  - Cena hamburgera (u dolarima)

- Cilj: ocena reakcije prodaje hamburgera (Y_i) na promenu cene hamburgera (X_i) prema modelu:

$$\hat{Y}_i = b_0 + bX_i$$

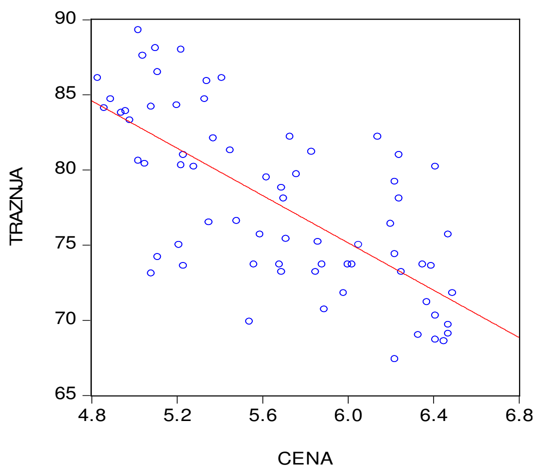
57

3. Primena jednostavne regresije: dijagram rasturanja tačaka



58

3. Primena jednostavne regresije: dijagram rasturanja tačaka sa pravom linijom



59

	Y	X
1	73.2	5.690000
2	71.8	6.490000
3	67.4	6.220000
4	89.3	5.020000
5	70.3	6.410000
6	73.2	5.850000
7	86.1	5.410000
8	81.0	6.240000
9	76.4	6.200000
10	76.6	5.480000
11	82.2	6.140000
12	82.1	5.370000
13	68.6	6.450000
14	76.5	5.350000
15	80.3	5.220000
16	70.7	5.890000
17	75.0	5.210000
18	73.7	6.000000
19	71.2	6.370000
20	84.7	5.330000
21	73.6	5.230000
22	73.7	5.880000
23	78.1	6.240000
24	75.7	5.590000
25	74.4	6.220000
26	68.7	6.410000
27	83.9	4.960000
28	86.1	4.830000
29	73.7	6.350000
30	75.7	6.470000
31	78.8	5.690000
32	73.7	5.560000
33	80.2	6.410000
34	69.9	5.540000
35	69.1	6.470000

	Y	X
36	83.8	4.940000
37	84.3	5.200000
38	79.5	5.620000
39	80.2	5.280000
40	86.5	5.110000
41	87.6	5.040000
42	84.2	5.080000
43	75.2	5.860000
44	84.7	4.890000
45	73.7	5.680000
46	81.2	5.830000
47	69.0	6.330000
48	69.7	6.470000
49	78.1	5.700000
50	88.0	5.220000
51	80.4	5.050000
52	79.7	5.760000
53	73.2	6.250000
54	85.9	5.340000
55	83.3	4.980000
56	73.6	6.390000
57	79.2	6.220000
58	88.1	5.100000
59	64.5	6.490000
60	84.1	4.860000
61	71.8	5.980000
62	80.6	5.020000
63	73.1	5.080000
64	81.0	5.230000
65	73.7	6.020000
66	82.2	5.730000
67	74.2	5.110000
68	75.4	5.710000
69	81.3	5.450000
70	75.0	6.050000

3. Primena jednostavne regresije: rezultat

- Primenom metoda ONK ocenjen je model zavisnosti ostvarene prodaje hamburgera od cene hamburgera:

$$\hat{Y}_i = 122.39 - 7.87 X_i$$

- Interpretacija parametra nagiba
  - Ako se cena poveća za 1 dolar prodaja opada za 7870 dolara u toku mesec dana.
    - Ako se cena poveća za 10 centi prodaja opada za 787 dolara.

61